

Meccanica Applicata alle Macchine

—

Una proposta di risposte ai quesiti teorici

(anno accademico 2019-2020)

Indice

1) Coppie cinematiche, meccanismi e macchine.....	2
2) Meccanismo con catena cinematica seriale RR.....	3
3) Quadrilatero articolato.....	5
4) Glifo oscillante.....	7
5) Attrito e leggi di Coulomb.....	10
6) Resistenza al rotolamento.....	12
7) Usura e frizione a dischi.....	16
8) Coppie cinematiche lubrificate.....	18
9) Modellazione dei gruppi di macchine.....	24
10) Modellazione del motore e dell'utilizzatore.....	26
11) Modelli cinematico e dinamico delle trasmissioni.....	29
12) Dinamica di un gruppo di macchine.....	31
13) Modello dinamico di un ascensore.....	34
14) Modello dinamico di un veicolo terrestre.....	36
15) Modello dinamico di un treno.....	38
16) Modello di un gruppo di macchine periodico.....	40
17) Trasmissioni rigide e con flessibili.....	43
18) Ruote dentate.....	44
19) Rotismi.....	50
20) Cinghie, catene e funi.....	53
21) Vibrazioni di un sistema a 1 GdL.....	58
22) Vibrazioni libere smorzate.....	60
23) Vibrazioni forzate da un'azione costante a gradino.....	63
24) Vibrazioni forzate da un'azione armonica.....	64
25) Vibrazioni forzate da un'azione periodica.....	68
26) Isolamento delle vibrazioni.....	70
27) Stabilità delle vibrazioni e vibrazioni autoeccitate.....	73
28) Manovellismo ordinario centrato.....	76
29) Motore alternativo.....	80

Questi sono appunti raccolti e compilati nell'anno accademico 2019-2020 per il corso di Meccanica Applicata alle Macchine tenuto dal prof. Del Vescovo nel primo semestre. Consistendo la prova scritta – oltre che in esercizi – nella risposta a un quesito teorico sorteggiato tra un totale di ventinove, è stato ritenuto opportuno rispondere a tali domande in preparazione dell'esame cercando di integrare appunti presi durante il corso, lettura degli argomenti dal libro di testo e, talvolta, approfondendo. Questi appunti sono il prodotto di tale lavoro personale.

Si fanno alcuni disclaimer:

- non si esclude la presenza di errori di calcolo e/o di battitura;

- alcune risposte sono molto prolisse o perché l'argomento lo richiede o perché sono stati svolti calcoli non richiesti in alcun punto del quesito, altre sono molto brevi o perché l'argomento è semplice o perché molto descrittivo e poco "calcoloso" mentre in alcuni casi manca la risposta al punto di un quesito perché non era ben chiaro cosa stesse venendo chiesto;

- si consiglia comunque sia di compilare delle risposte personali in preparazione all'esame.

Detto ciò, spero che questi appunti possano risultare utili a più studenti possibile.

1) Coppie cinematiche, meccanismi e macchine

Fornire una descrizione generale sui seguenti argomenti:

- a) macchine motrici, generatrici e operatrici;
- b) gruppi di macchine;
- c) meccanismi;
- d) coppie e catene cinematiche.

Una macchina è un sistema di elementi materiali in moto relativo tra loro, costruito per compiere un'operazione e il quale assorbe/fornisce lavoro prima/dopo che al suo interno sia avvenuta una trasformazione di energia. Nelle macchine sono presenti parti fisse, dette telaio o incastellatura, vincolate a organi mobili che sono corpi rigidi (o modellati come tali), anch'essi vincolati tra loro.

Una macchina che trasforma tipi di energia che non siano energia meccanica in energia meccanica stessa è detta macchina motrice. Esempi notevoli ne sono un motore alternativo a combustione interna (calore → en. meccanica), una turbina (en. potenziale di un fluido → en. meccanica) o un motore elettrico (en. elettrica → en. meccanica). Una che invece opera l'inverso, dunque trasforma energia meccanica in altri tipi di energia, è detta macchina generatrice, come un compressore alternativo o rotativo (en. meccanica → en. potenziale di un fluido) oppure un alternatore (en. meccanica → en. elettrica). Leggermente diverso è il discorso per le macchine operatrici, in cui energia meccanica viene fatta divenire lavoro necessario a compiere una assegnata operazione (si vedano macchine utensili, betoniere, macchine per il sollevamento di materiali, macchine per la produzione in serie di manufatti industriali, ...).

Una combinazione di macchine collegate tra loro fornisce un gruppo di macchine. Si può, ad esempio, collegare un motore a combustione interna o una turbina con un alternatore elettrico (quindi mettere in cascata una macchina motrice e una generatrice) per avere un gruppo che trasformi energia calorifica o potenziale di un fluido in energia elettrica oppure si possono anche mettere in serie un motore elettrico e un tornio (macchina motrice + macchina operatrice) per avere lo svolgimento di un compito a spese di energia elettrica.

I meccanismi sono per definizione dei sistemi meccanici che realizzano una trasmissione del moto tra parti della stessa macchina o tra più macchine senza trasformare l'energia. Ne sono un esempio: il manovellismo di spinta, deputato alla trasformazione di un moto rotatorio in moto traslatorio (alternato); il quadrilatero articolato, utile a trasformare un moto rotatorio in un moto rotatorio diverso; le trasmissioni a cinghia o gli ingranaggi (cilindrici, conici o ad assi sghembi), in grado di cambiare tra il loro input e il loro output velocità e coppia della potenza meccanica.

Due organi di un meccanismo tra loro vincolati si dicono coppia cinematica e le superfici loro appartenenti che si trovano in contatto e realizzano suddetto vincolo sono dette elementi cinematici.

Le coppie cinematiche si classificano in:

- indipendenti se hanno un grado di libertà relativo determinato unicamente dal vincolo che lega gli organi stessi (vedi due aste incernierate);
- dipendenti se il vincolo che ne lega gli organi permette più di un grado di libertà relativo ma questo è ridotto a uno in virtù dell'accoppiamento con organi all'infuori della coppia (vedi la coppia cilindro-pistone: sarebbero permesse la traslazione e la rotazione assiale ma quest'ultima è impedita dall'accoppiamento pistone-biella);
- di forza se l'accoppiamento dipende dalle forze in gioco (vedi la coppia pneumatico-strada).

Gli elementi cinematici si classificano in:

- inferiori se le superfici sono combacianti;
- superiori se o le superfici sono combacianti ma non rigide (coppia cinghia-puleggia) o le superfici sono rigide ma non combacianti – ossia si toccano idealmente per punti o linee –, pur tuttavia costrette a essere coniugate, cioè aventi stessa tangente nella zona di contatto (vedi due ruote dentate).

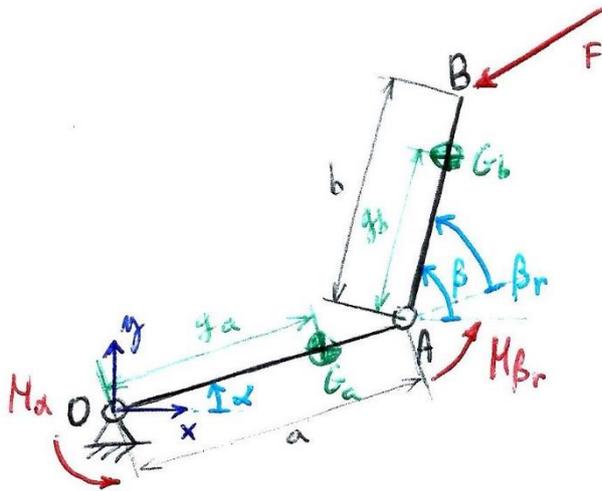
Si dicono coppie elementari quelle coppie cinematiche indipendenti e collegate da elementi cinematici inferiori. Sono solo tre: la coppia rotoidale, la coppia prismatica e la coppia elicoidale (in realtà è una sola se consideriamo le prime due come casi particolari dell'ultima).

Una catena cinematica è un insieme di organi che formano coppie cinematiche tra loro. La catena è semplice – se ogni organo fa parte al massimo di due coppie cinematiche – o composta – se per almeno un organo non è così. Inoltre la catena è chiusa – se ogni organo fa parte di almeno due coppie cinematiche – o aperta – se per almeno un organo non è così.

2) Meccanismo con catena cinematica seriale RR

Per un meccanismo planare, di due elementi collegati con coppie rotoidali che formano una catena cinematica seriale in un piano orizzontale, sviluppando solo i calcoli significativi, si descriva:

- il funzionamento generale, i vincoli, i gradi di libertà, il metodo per scegliere le variabili indipendenti e i campi di impiego;
- il modello cinematico per la posizione, velocità e accelerazione che esprime le variabili del moto dei membri del meccanismo in funzione delle variabili indipendenti;
- in funzione delle sole variabili indipendenti, l'energia cinetica dei vari membri mobili con un carico pagante puntiforme all'estremo libero;
- per il sistema del punto precedente, il modello dinamico evidenziando l'azione degli attuatori e considerando trascurabili eventuali forze esterne.



Tale meccanismo è a catena cinematica aperta e semplice e, costituendo un sistema di due corpi più il telaio vincolati da due coppie rotoidali, la formula di Grübler restituisce per il conteggio dei suoi gradi di libertà: $n = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 2 \text{ GdL}$. Si scelgono quali variabili indipendenti l'anomalia α del braccio collegato al telaio e l'anomalia relativa β_r del secondo braccio. Infatti questo meccanismo è usato in industria nei robot S.C.A.R.A. e guidato da due motori apposti sulle coppie rotoidali e deputati a controllare la rotazione assoluta e relativa dei bracci. Si noti che il meccanismo RR è un meccanismo piano, diciamo operante in x-y: nel robot S.C.A.R.A. all'estremità del secondo braccio è posto un attuatore e un terzo braccio che

controllerà il raggiungimento di una quota z.

Per quanto riguarda la cinematica, si è interessati alle posizioni nel piano raggiungibili dal punto $B = (x_B, y_B)$. Varrà l'equazione vettoriale $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$, che in forma fasoriale diviene (se β è l'anomalia assoluta e quindi $\beta = \alpha + \beta_r$):

$$x_B + iy_B = ae^{i\alpha} + be^{i(\alpha+\beta_r)}$$

che scomposta sarà:

$$\begin{cases} x_B = a \cos \alpha + b \cos(\alpha + \beta_r) \\ y_B = a \sin \alpha + b \sin(\alpha + \beta_r) \end{cases}$$

Derivando si ha

$$\dot{x}_B + i\dot{y}_B = ia\dot{\alpha}e^{i\alpha} + ib(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)e^{i(\alpha+\beta_r)}$$

che è un'espressione interpretabile col teorema delle velocità relative. Se infatti si considera un sistema mobile, solo traslante insieme ad A, si legge che la velocità assoluta di B, al primo membro, è uguale a una velocità di trascinamento, ossia la velocità assoluta di A rappresentata dal primo termine del secondo membro (infatti questo è un vettore di modulo $a\dot{\alpha}$ e diretto come $\alpha + \frac{\pi}{2}$), più quella che può essere interpretata come la velocità di B come registrata dal sistema di riferimento mobile (infatti questo è un vettore di modulo $b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) = b\dot{\beta}$ e diretto come $\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r + \frac{\pi}{2} = \dot{\beta} + \frac{\pi}{2}$). Scomposta, l'espressione diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}_B = -a\dot{\alpha} \sin \alpha - b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) \sin(\alpha + \beta_r) \\ \dot{y}_B = a\dot{\alpha} \cos \alpha + b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) \cos(\alpha + \beta_r) \end{cases}$$

Derivando ulteriormente l'espressione fasoriale per studiare le accelerazioni si ha

$$\ddot{x}_B + i\ddot{y}_B = ia\ddot{\alpha}e^{i\alpha} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha} + ib(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}_r)e^{i(\alpha+\beta_r)} - b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2e^{i(\alpha+\beta_r)}$$

Analogamente al caso delle velocità, se si interpreta la relazione col teorema di Coriolis considerando lo stesso sistema di riferimento mobile, si vede che l'accelerazione assoluta di B al primo membro scomposta nelle componenti cartesiane è scrivibile come somma di un'accelerazione di trascinamento (i primi due termini del secondo membro, rappresentanti rispettivamente le componenti tangenziale e normale) e l'accelerazione relativa (i secondi due termini del secondo membro, rappresentanti rispettivamente le componenti tangenziale e normale).

Lo studio dinamico del sistema dovrà mettere in relazione una forzante F qualsivoglia orientata applicata nell'estremo libero coi momenti torcenti M_α e M_{β_r} che i motori sulle cerniere dovranno erogare.

Essendo che il sistema ha due gradi di libertà, converrà servirsi delle equazioni di Lagrange. L'energia cinetica dei due corpi in funzione delle coordinate indipendenti è

$$\begin{aligned}
E_a^c &= \frac{1}{2}J_a^G \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_a v_{G_a}^2 = \frac{1}{2}(J_a^G + m_a g_a^2) \dot{\alpha}^2 \\
E_b^c &= \frac{1}{2}J_b^G (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + \frac{1}{2}m_b v_{G_b}^2 = \frac{1}{2}J_b^G (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + \frac{1}{2}m_b |ia\dot{\alpha}e^{i\alpha} + ig_b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)e^{i(\alpha+\beta_r)}|^2 \\
&= \frac{1}{2}J_b^G (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}m_b [(-a\dot{\alpha} \sin \alpha - g_b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) \sin(\alpha + \beta_r))^2 + (a\dot{\alpha} \cos \alpha + g_b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) \cos(\alpha + \beta_r))^2] \\
&= \frac{1}{2}J_b^G (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}m_b [a^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha + g_b^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 \sin^2(\alpha + \beta_r) + 2a\dot{\alpha}g_b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) \sin \alpha \sin(\alpha + \beta_r) \\
&\quad + a^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha + g_b^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 \cos^2(\alpha + \beta_r) + 2a\dot{\alpha}g_b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) \cos \alpha \cos(\alpha + \beta_r)] \\
&= \frac{1}{2}J_b^G (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}m_b \{a^2 \dot{\alpha}^2 + g_b^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + 2a\dot{\alpha}g_b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)[\sin \alpha \sin(\alpha + \beta_r) + \cos \alpha \cos(\alpha + \beta_r)]\} \\
&= \frac{1}{2}J_b^G (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + \frac{1}{2}m_b [a^2 \dot{\alpha}^2 + g_b^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + 2a\dot{\alpha}g_b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) \cos(\alpha - (\alpha + \beta_r))] \\
&= \frac{1}{2}J_b^G (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + \frac{1}{2}m_b [a^2 \dot{\alpha}^2 + g_b^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + 2a\dot{\alpha}g_b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) \cos(-\beta_r)] \\
&= \frac{1}{2}J_b^G (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + \frac{1}{2}m_b [a^2 \dot{\alpha}^2 + g_b^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + 2a\dot{\alpha}g_b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) \cos \beta_r]
\end{aligned}$$

(dove è stata usata la relazione trigonometrica

$$\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = \cos(\theta - \varphi)$$

e infine la proprietà di parità della funzione coseno).

Per costruire le equazioni di Lagrange abbiamo bisogno di

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{tot}^c}{\partial \dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} \left[\frac{1}{2}(J_a^G + m_a g_a^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}J_b^G (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + \frac{1}{2}m_b (a^2 \dot{\alpha}^2 + g_b^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + 2a\dot{\alpha}g_b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) \cos \beta_r) \right] \\
&= (J_a^G + m_a g_a^2) \dot{\alpha} + J_b^G (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) + m_b (a^2 \dot{\alpha} + g_b^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) + a g_b \cos \beta_r (2\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)) \\
\frac{\partial E_{tot}^c}{\partial \dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} \left[\frac{1}{2}(J_a^G + m_a g_a^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}J_b^G (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + \frac{1}{2}m_b (a^2 \dot{\alpha}^2 + g_b^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + 2a\dot{\alpha}g_b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) \cos \beta_r) \right] = 0 \\
Q_\alpha^F &= F_x \frac{\partial x_B}{\partial \dot{\alpha}} + F_y \frac{\partial y_B}{\partial \dot{\alpha}} = F_x \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} [a \cos \alpha + b \cos(\alpha + \beta_r)] + F_y \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} [a \sin \alpha + b \sin(\alpha + \beta_r)] \\
&= F_x (-a \sin \alpha - b \sin(\alpha + \beta_r)) + F_y (a \cos \alpha + b \cos(\alpha + \beta_r)) \\
Q_\alpha^{M_\alpha} &= M_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\alpha}} = M_\alpha \\
Q_\alpha^{M_{\beta_r}} &= M_{\beta_r} \frac{\partial \beta_r}{\partial \dot{\alpha}} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{tot}^c}{\partial \dot{\beta}_r} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\beta}_r} \left[\frac{1}{2}(J_a^G + m_a g_a^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}J_b^G (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + \frac{1}{2}m_b (a^2 \dot{\alpha}^2 + g_b^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + 2a\dot{\alpha}g_b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) \cos \beta_r) \right] \\
&= J_b^G (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) + m_b g_b^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) + m_b a \dot{\alpha} g_b \cos \beta_r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{tot}^c}{\partial \beta_r} &= \frac{\partial}{\partial \beta_r} \left[\frac{1}{2}(J_a^G + m_a g_a^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}J_b^G (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + \frac{1}{2}m_b (a^2 \dot{\alpha}^2 + g_b^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r)^2 + 2a\dot{\alpha}g_b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) \cos \beta_r) \right] \\
&= -m_b a \dot{\alpha} g_b (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) \sin \beta_r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\beta_r}^F &= F_x \frac{\partial x_B}{\partial \dot{\beta}_r} + F_y \frac{\partial y_B}{\partial \dot{\beta}_r} = F_x \frac{\partial}{\partial \dot{\beta}_r} [a \cos \alpha + b \cos(\alpha + \beta_r)] + F_y \frac{\partial}{\partial \dot{\beta}_r} [a \sin \alpha + b \sin(\alpha + \beta_r)] \\
&= -F_x b \sin(\alpha + \beta_r) + F_y b \cos(\alpha + \beta_r)
\end{aligned}$$

$$Q_{\beta_r}^{M_\alpha} = M_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\beta}_r} = 0$$

$$Q_{\beta_r}^{M_{\beta_r}} = M_{\beta_r} \frac{\partial \beta_r}{\partial \dot{\beta}_r} = M_{\beta_r}$$

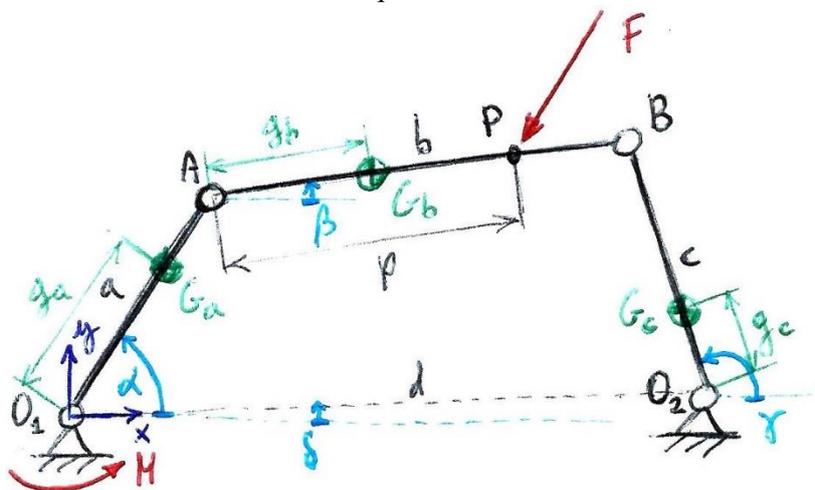
Le equazioni di Lagrange $\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial E_{tot}^c}{\partial \dot{\alpha}} \right] - \frac{\partial E_{tot}^c}{\partial \alpha} &= Q_{\alpha}^F + Q_{\alpha}^{M_{\alpha}} + Q_{\alpha}^{M_{\beta_r}} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial E_{tot}^c}{\partial \dot{\beta}_r} \right] - \frac{\partial E_{tot}^c}{\partial \beta_r} &= Q_{\beta_r}^F + Q_{\beta_r}^{M_{\alpha}} + Q_{\beta_r}^{M_{\beta_r}} \end{aligned} \right.$ sono allora:

$$\begin{cases} (J_a^G + m_a g_a^2) \ddot{\alpha} + J_b^G (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}_r) + m_b (a^2 \ddot{\alpha} + g_b^2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}_r) + a g_b \cos \beta_r (2\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}_r)) = \\ = F_x (-a \sin \alpha - b \sin(\alpha + \beta_r)) + F_y (a \cos \alpha + b \cos(\alpha + \beta_r)) + M_{\alpha} \\ J_b^G (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}_r) + m_b g_b^2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}_r) + m_b a \ddot{\alpha} g_b \cos \beta_r + m_b a \dot{\alpha} g_b (\dot{\alpha} + \dot{\beta}_r) \sin \beta_r = \\ = -F_x b \sin(\alpha + \beta_r) + F_y b \cos(\alpha + \beta_r) + M_{\beta_r} \\ (J_a^G + m_a g_a^2 + J_b^G + m_b a^2 + m_b g_b^2 + 2m_b a g_b \cos \beta_r) \ddot{\alpha} + (J_b^G + m_b g_b^2 + m_b a g_b \cos \beta_r) \ddot{\beta}_r = \\ = -F_x (a \sin \alpha + b \sin(\alpha + \beta_r)) + F_y (a \cos \alpha + b \cos(\alpha + \beta_r)) + M_{\alpha} \\ (J_b^G + m_b g_b^2 + m_b a g_b \cos \beta_r) \ddot{\alpha} + (J_b^G + m_b g_b^2) \ddot{\beta}_r + m_b a g_b \sin \beta_r \dot{\alpha}^2 + m_b a \dot{\alpha} g_b \sin \beta_r \dot{\beta}_r = \\ = -F_x b \sin(\alpha + \beta_r) + F_y b \cos(\alpha + \beta_r) + M_{\beta_r} \end{cases}$$

3) Quadrilatero articolato

Per un quadrilatero articolato, si descriva:

- il funzionamento generale, i vincoli, i gradi di libertà e i campi di impiego;
- le condizioni in cui si hanno due manovelle o due bilancieri o una manovella e un bilanciere;
- assumendo come variabile indipendente la posizione di un membro vincolato al telaio, il modello cinematico per la posizione, velocità e accelerazione che esprime le variabili del moto dei membri del meccanismo in funzione della variabile indipendente e sue derivate; sviluppare solo i calcoli significativi;
- l'energia cinetica dei vari membri mobili in funzione delle sole variabili del punto precedente;
- il modello dinamico tramite il bilancio delle potenze considerando un momento motore su una manovella e una forza resistente sulla biella con direzione e punto di applicazione qualsiasi; sviluppare solo i calcoli significativi;
- lo schema di funzionamento, specificando il movente e il cedente e tipo di attuatore, di un braccio di sollevamento basato su un quadrilatero articolato.



Il quadrilatero articolato è un meccanismo a catena cinematica chiusa e semplice utilizzato sia per trasformare un moto rotatorio in un altro, sempre rotatorio ma differente, che in gru di sollevamento o sospensioni. Si compone di tre corpi più uno, assunto come telaio, collegati a due a due da una coppia rotoidale, dunque la formula di Grübler suggerisce che il meccanismo abbia $n = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 1 GdL$.

Le lunghezze delle aste (in realtà le distanze tra le cerniere, poiché i corpi possono avere in generale qualsiasi forma) che lo compongono determinano il tipo di movimento che compiono le due aste collegate al telaio, cioè se una rotazione completa (allora l'asta è una manovella) o alternata (allora è un bilanciere). Vale per tale determinazione la regola di Grashof ossia, posto che $l_1 < l_2 < l_3 < l_4$:

- se $l_1 + l_4 > l_2 + l_3$ avrò un meccanismo a doppio bilanciere;
- se $l_1 + l_4 < l_2 + l_3$ avrò: ancora un meccanismo a doppio bilanciere se il lato più corto è la biella (il corpo che compie moto rototraslatorio tra le due aste a telaio), un meccanismo a doppia manovella se il lato più corto è considerato telaio oppure, se il lato più corto è collegato al telaio, un meccanismo manovella-bilanciere (dove il lato più corto è ovviamente la manovella).

La cinematica si studia scrivendo l'equazione di chiusura $\overrightarrow{O_1 A} + \overrightarrow{A B} = \overrightarrow{O_1 O_2} + \overrightarrow{O_2 B}$, che in forma fasoriale è

$$a e^{i\alpha} + b e^{i\beta} = d e^{i\delta} + c e^{i\gamma}$$

che, proiettata, è

$$\begin{cases} a \cos \alpha + b \cos \beta = d \cos \delta + c \cos \gamma \\ a \sin \alpha + b \sin \beta = d \sin \delta + c \sin \gamma \end{cases}$$

Da queste equazioni si possono ottenere per via numerica le espressioni $\beta = \beta(\alpha)$ e $\gamma = \gamma(\alpha)$.

Per le velocità occorre derivare l'equazione di chiusura

$$ia\dot{\alpha}e^{i\alpha} + ib\dot{\beta}e^{i\beta} = ic\dot{\gamma}e^{i\gamma}$$

È facile interpretarla col teorema delle velocità relative: al secondo membro troviamo infatti la velocità assoluta di B , leggibile d'altronde come somma di una velocità di trascinamento – che è la velocità assoluta di A se scelgo un sistema di riferimento mobile solo traslante con ivi origine –, ossia il primo termine del primo membro, e di una velocità relativa – il secondo termine del primo membro –, vale a dire quella registrata da un osservatore in A . L'equazione di chiusura alle velocità scomposta fornisce il sistema

$$\begin{cases} -a\dot{\alpha} \sin \alpha - b\dot{\beta} \sin \beta = -c\dot{\gamma} \sin \gamma \\ a\dot{\alpha} \cos \alpha + b\dot{\beta} \cos \beta = c\dot{\gamma} \cos \gamma \end{cases}$$

lineare nelle incognite $\dot{\beta}$ e $\dot{\gamma}$. Si trova facilmente, ad esempio col metodo di Cramer, che

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(\alpha, \dot{\alpha}) &= \frac{-a\dot{\alpha} \sin \alpha c \cos \gamma(\alpha) - a\dot{\alpha} \cos \alpha (-c \sin \gamma(\alpha))}{b \sin \beta(\alpha) c \cos \gamma(\alpha) - b \cos \beta(\alpha) c \sin \gamma(\alpha)} = \frac{a(\cos \alpha \sin \gamma(\alpha) - \sin \alpha \cos \gamma(\alpha))}{b(\sin \beta(\alpha) \cos \gamma(\alpha) - \cos \beta(\alpha) \sin \gamma(\alpha))} \dot{\alpha} \\ &= \frac{a \sin(\gamma(\alpha) - \alpha)}{b \sin(\beta(\alpha) - \gamma(\alpha))} \dot{\alpha} = \Lambda_{\beta}(\alpha) \dot{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\alpha, \dot{\alpha}) &= \frac{b \sin \beta(\alpha) a \dot{\alpha} \cos \alpha - (-a \dot{\alpha} \sin \alpha)(-b \dot{\beta} \cos \beta(\alpha))}{b \sin \beta(\alpha) c \cos \gamma(\alpha) - b \cos \beta(\alpha) c \sin \gamma(\alpha)} = \frac{a(\cos \alpha \sin \beta(\alpha) - \sin \alpha \cos \beta(\alpha))}{c(\sin \beta(\alpha) \cos \gamma(\alpha) - \cos \beta(\alpha) \sin \gamma(\alpha))} \dot{\alpha} \\ &= \frac{a \sin(\beta(\alpha) - \alpha)}{c \sin(\beta(\alpha) - \gamma(\alpha))} \dot{\alpha} = \Lambda_{\gamma}(\alpha) \dot{\alpha} \end{aligned}$$

dove $\Lambda_{\beta}(\alpha)$ e $\Lambda_{\gamma}(\alpha)$ sono gli jacobiani del moto rispetto alla variabile indipendente.

Derivando l'equazione di chiusura alle velocità si ha la relazione sulle accelerazioni

$$ia\ddot{\alpha}e^{i\alpha} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha} + ib\ddot{\beta}e^{i\beta} - b\dot{\beta}^2e^{i\beta} = ic\ddot{\gamma}e^{i\gamma} - c\dot{\gamma}^2e^{i\gamma}$$

facilmente interpretabile anche questa secondo il teorema di Coriolis: se il sistema mobile è sempre quello traslante con A , allora i primi due termini del primo membro sono l'accelerazione di trascinamento (componenti rispettivamente tangenziale e normale) – l'accelerazione di A – e i secondi due sono quella di B (componenti rispettivamente tangenziale e normale) come registrata da un osservatore in A . Queste due, sommate, danno ovviamente l'accelerazione assoluta di B . In forma scalare si ha il sistema

$$\begin{cases} -a\ddot{\alpha} \sin \alpha - a\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - b\ddot{\beta} \sin \beta - b\dot{\beta}^2 \cos \beta = -c\ddot{\gamma} \sin \gamma - c\dot{\gamma}^2 \cos \gamma \\ a\ddot{\alpha} \cos \alpha - a\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + b\ddot{\beta} \cos \beta - b\dot{\beta}^2 \sin \beta = c\ddot{\gamma} \cos \gamma - c\dot{\gamma}^2 \sin \gamma \end{cases}$$

che può essere risolto per trovare $\ddot{\beta} = \ddot{\beta}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ e $\ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$. Potrebbe tuttavia risultare più agevole trovare queste derivate seconde tramite l'espressione delle velocità in cui compaiono gli jacobiani; infatti (lo si dimostra solo per β e sarà uguale per γ) vale

$$\ddot{\beta} = \frac{d}{dt} [\Lambda_{\beta}(\alpha) \dot{\alpha}] = \frac{d}{dt} [\Lambda_{\beta}(\alpha)] \dot{\alpha} + \Lambda_{\beta}(\alpha) \ddot{\alpha} = \Lambda_{\beta}'(\alpha) \dot{\alpha}^2 + \Lambda_{\beta}(\alpha) \ddot{\alpha}$$

(N.B. L'apice rappresenta la derivata fatta per l'argomento della funzione).

Pertanto avremo

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) &= \frac{a}{b} \left[(\gamma'(\alpha) - 1) \frac{\cos(\alpha - \gamma(\alpha))}{\sin(\beta(\alpha) - \gamma(\alpha))} + (\beta'(\alpha) - \gamma'(\alpha)) \frac{\sin(\alpha - \gamma(\alpha))}{\text{tg}(\beta(\alpha) - \gamma(\alpha)) \sin(\beta(\alpha) - \gamma(\alpha))} \right] \dot{\alpha}^2 \\ &\quad + \frac{a \sin(\gamma(\alpha) - \alpha)}{b \sin(\beta(\alpha) - \gamma(\alpha))} \ddot{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) &= \frac{a}{c} \left[(\beta'(\alpha) - 1) \frac{\cos(\alpha - \beta(\alpha))}{\sin(\beta(\alpha) - \gamma(\alpha))} + (\beta'(\alpha) - \gamma'(\alpha)) \frac{\sin(\alpha - \beta(\alpha))}{\text{tg}(\beta(\alpha) - \gamma(\alpha)) \sin(\beta(\alpha) - \gamma(\alpha))} \right] \dot{\alpha}^2 \\ &\quad + \frac{a \sin(\beta(\alpha) - \alpha)}{c \sin(\beta(\alpha) - \gamma(\alpha))} \ddot{\alpha} \end{aligned}$$

Considerato un momento motore M e una forzante F qualsivoglia orientata o posizionata sulla biella, è conveniente ricavare il modello dinamico dal bilancio delle potenze. Per scriverlo si ha bisogno di

$$E_a^c = \frac{1}{2} J_a^G \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_a v_{G_a}^2 = \frac{1}{2} (J_a^G + m_a g_a^2) \dot{\alpha}^2$$

$$\begin{aligned}
E_b^c &= \frac{1}{2} J_b^G \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_b v_{G_b}^2 = \frac{1}{2} J_b^G \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_b |ia\dot{\alpha}e^{i\alpha} + ig_b\dot{\beta}e^{i\beta}|^2 \\
&= \frac{1}{2} J_b^G \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_b [(-a\dot{\alpha} \sin \alpha - g_b\dot{\beta} \sin \beta)^2 + (a\dot{\alpha} \cos \alpha + g_b\dot{\beta} \cos \beta)^2] \\
&= \frac{1}{2} J_b^G \dot{\beta}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_b [a^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha + g_b^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \beta + 2a\dot{\alpha}g_b\dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta + a^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha + g_b^2 \dot{\beta}^2 \cos^2 \beta \\
&\quad + 2a\dot{\alpha}g_b\dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta] = \frac{1}{2} J_b^G \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_b [a^2 \dot{\alpha}^2 + g_b^2 \dot{\beta}^2 + 2a\dot{\alpha}g_b\dot{\beta} \cos(\alpha - \beta)]
\end{aligned}$$

(dove si è considerato che $\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta)$)

$$\begin{aligned}
E_c^c &= \frac{1}{2} J_c^G \dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2} m_c v_{G_c}^2 = \frac{1}{2} (J_c^G + m_c g_c^2) \dot{\gamma}^2 \\
\frac{d}{dt} E_{tot}^c &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (J_a^G + m_a g_a^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} J_b^G \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_b [a^2 \dot{\alpha}^2 + g_b^2 \dot{\beta}^2 + 2a\dot{\alpha}g_b\dot{\beta} \cos(\alpha - \beta)] + \frac{1}{2} (J_c^G + m_c g_c^2) \dot{\gamma}^2 \right] \\
&= (J_a^G + m_a g_a^2 + m_b a^2) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + (J_b^G + m_b g_b^2) \dot{\beta} \ddot{\beta} + m_b a \ddot{\alpha} g_b \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \\
&\quad + m_b a \dot{\alpha} g_b \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) - m_b a \dot{\alpha} g_b \dot{\beta} (\dot{\alpha} - \dot{\beta}) \sin(\alpha - \beta) + (J_c^G + m_c g_c^2) \dot{\gamma} \ddot{\gamma}
\end{aligned}$$

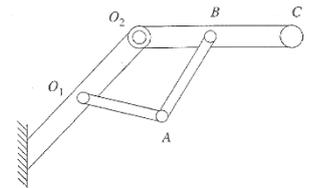
$$W^M = M \dot{\alpha}$$

$$W^F = \vec{F} \cdot \vec{v}_p = F_x (-a\dot{\alpha} \sin \alpha - p\dot{\beta} \sin \beta) + F_y (a\dot{\alpha} \cos \alpha + p\dot{\beta} \cos \beta)$$

Allora il bilancio delle potenze $\frac{d}{dt} E_{tot}^c = W^F + W^M$ si scrive

$$\begin{aligned}
&(J_a^G + m_a g_a^2 + m_b a^2) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + (J_b^G + m_b g_b^2) \dot{\beta} \ddot{\beta} + m_b a \ddot{\alpha} g_b \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + m_b a \dot{\alpha} g_b \ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) \\
&\quad - m_b a \dot{\alpha} g_b \dot{\beta} (\dot{\alpha} - \dot{\beta}) \sin(\alpha - \beta) + (J_c^G + m_c g_c^2) \dot{\gamma} \ddot{\gamma} \\
&= M \dot{\alpha} - F_x (a\dot{\alpha} \sin \alpha + p\dot{\beta} \sin \beta) + F_y (a\dot{\alpha} \cos \alpha + p\dot{\beta} \cos \beta)
\end{aligned}$$

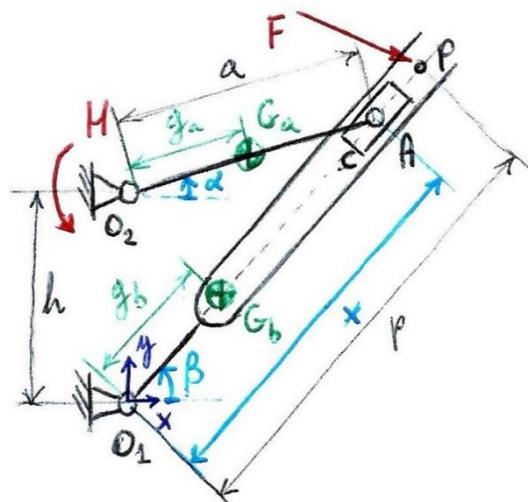
Il quadrilatero articolato, tra le altre cose, può essere utilizzato per realizzare un braccio di sollevamento. Il motore (elettrico) viene posto in O_1 , rendendo movente l'asta O_1A , mentre il carico è posto verticale in C , cioè l'asta O_2C è cedente.



4) Glifo oscillante

Assumendo la manovella movente e il glifo cedente, si descriva:

- il funzionamento generale, i vincoli, i gradi di libertà e i campi di impiego;
- assumendo come variabile indipendente quella del movente, il modello cinematico per la posizione, velocità e accelerazione per esprimere le variabili del moto del meccanismo in funzione della variabile del movente e sue derivate; sviluppare solo i calcoli significativi;
- l'energia cinetica dei vari membri mobili in funzione delle sole variabili del punto precedente;
- il modello dinamico tramite il bilancio delle potenze considerando un momento motore e una forza resistente, sviluppando solo i calcoli significativi;
- la capacità di poter essere utilizzato come slitta porta utensili, dovuta al movimento di alimentazione e di recupero con velocità diverse;
- lo schema di funzionamento, specificando movente, cedente e tipo di attuatore, di un braccio di sollevamento basato su un glifo, comparandolo con l'impianto analogo ottenuto con un quadrilatero articolato.



Il glifo oscillante è un meccanismo a catena cinematica chiusa e semplice utilizzato sia per trasformare un moto rotatorio completo in uno rotatorio alternato che in gru di sollevamento o sospensioni (vedi la sospensione MacPherson). Oltre al telaio, si compone di tre corpi, due aste e un corsoio: le due aste sono incernierate al telaio ma una delle due, la manovella, è a sua volta incernierata a un corsoio che scorre mediante coppia prismatica sull'altra, il bilanciante. La formula di Grübler suggerisce che il meccanismo abbia $n = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 1 GdL$.

La cinematica si studia scrivendo l'equazione di chiusura

$$\overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 A} = \overline{O_1 A}, \text{ che in forma fasoriale è } ih + ae^{i\alpha} = xe^{i\beta}$$

mentre scomposta è

$$\begin{cases} a \cos \alpha = x \cos \beta \\ h + a \sin \alpha = x \sin \beta \end{cases}$$

Facendo il rapporto membro a membro si trova che

$$\beta(\alpha) = \operatorname{arctg} \left(\frac{h + a \sin \alpha}{a \cos \alpha} \right)$$

ed elevando entrambe le equazioni al quadrato e sommandole membro a membro si ha

$$x(\alpha) = \sqrt{a^2 + h^2 + 2ha \sin \alpha}$$

Derivando l'equazione di chiusura si ha

$$ia\dot{\alpha}e^{i\alpha} = \dot{x}e^{i\beta} + ix\dot{\beta}e^{i\beta}$$

la cui interpretazione tramite il teorema delle velocità relative si dà se si considera un sistema di riferimento mobile solo rotante insieme al bilanciante e con origine in O_1 : il termine al primo membro è la velocità assoluta del punto A ; il primo termine del secondo membro rappresenta la velocità relativa del punto A , ossia come registrata nel sistema di riferimento mobile (infatti ha modulo \dot{x} ed è diretta come β , cioè sempre lungo l'asse Re'), mentre il secondo è il trascinamento rotante del tipo $\vec{\beta} \times \overline{O_1A}$.

Proiettando l'equazione di chiusura alle velocità si ha il sistema

$$\begin{cases} -a\dot{\alpha} \sin \alpha = \dot{x} \cos \beta - x\dot{\beta} \sin \beta \\ a\dot{\alpha} \cos \alpha = \dot{x} \sin \beta + x\dot{\beta} \cos \beta \end{cases}$$

lineare nelle incognite $\dot{\beta}$ e \dot{x} . Si trova facilmente, ad esempio col metodo di Cramer, che

$$\dot{\beta}(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{-a\dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta(\alpha) - a\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta(\alpha)}{-x(\alpha) \sin^2 \beta(\alpha) - x(\alpha) \cos^2 \beta(\alpha)} = \frac{a}{x(\alpha)} \cos(\alpha - \beta(\alpha)) \dot{\alpha} = \Lambda_\beta(\alpha) \dot{\alpha}$$

$$\dot{x}(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{-x(\alpha) \sin \beta a\dot{\alpha} \cos \alpha - x(\alpha) \cos \beta (-a\dot{\alpha} \sin \alpha)}{-x(\alpha) \sin^2 \beta(\alpha) - x(\alpha) \cos^2 \beta(\alpha)} = a \sin(\alpha - \beta(\alpha)) \dot{\alpha} = \Lambda_x(\alpha) \dot{\alpha}$$

dove $\Lambda_\beta(\alpha)$ e $\Lambda_x(\alpha)$ sono gli jacobiani del moto rispetto alla variabile indipendente.

Derivando l'equazione di chiusura alle velocità si ha la relazione sulle accelerazioni

$$\begin{aligned} ia\ddot{\alpha}e^{i\alpha} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha} &= \ddot{x}e^{i\beta} + i\dot{x}\dot{\beta}e^{i\beta} + i\dot{x}\dot{\beta}e^{i\beta} + ix\ddot{\beta}e^{i\beta} - x\dot{\beta}^2e^{i\beta} \Rightarrow \\ \Rightarrow ia\ddot{\alpha}e^{i\alpha} - a\dot{\alpha}^2e^{i\alpha} &= \ddot{x}e^{i\beta} + 2i\dot{x}\dot{\beta}e^{i\beta} + ix\ddot{\beta}e^{i\beta} - x\dot{\beta}^2e^{i\beta} \end{aligned}$$

Interpretando mediante il teorema di Coriolis, si trova al primo membro l'accelerazione assoluta di A (componenti rispettivamente tangenziale e normale), mentre al secondo membro in ordine: l'accelerazione relativa di A , l'accelerazione di Coriolis (infatti è del tipo $2\vec{\beta} \times \vec{v}_{rel}$), l'accelerazione di trascinamento del tipo $\vec{\beta} \times \overline{O_1A}$ e infine quella di trascinamento centripeta (ossia del tipo $\vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \overline{O_1A})$).

Se la si scompone, si ha il sistema

$$\begin{cases} -a\ddot{\alpha} \sin \alpha - a\dot{\alpha}^2 \cos \alpha = \ddot{x} \cos \beta - 2\dot{x}\dot{\beta} \sin \beta - x\ddot{\beta} \sin \beta - x\dot{\beta}^2 \cos \beta \\ a\ddot{\alpha} \cos \alpha - a\dot{\alpha}^2 \sin \alpha = \ddot{x} \sin \beta + 2\dot{x}\dot{\beta} \cos \beta + x\ddot{\beta} \cos \beta - x\dot{\beta}^2 \sin \beta \end{cases}$$

la cui risoluzione fornisce $\ddot{\beta}$ e \ddot{x} , ottenibili però più sbrigativamente derivando le espressioni con gli jacobiani; infatti (lo si dimostra solo per β e sarà uguale per x) vale

$$\ddot{\beta} = \frac{d}{dt} [\Lambda_\beta(\alpha) \dot{\alpha}] = \frac{d}{dt} [\Lambda_\beta(\alpha)] \dot{\alpha} + \Lambda_\beta(\alpha) \ddot{\alpha} = \Lambda_\beta'(\alpha) \dot{\alpha}^2 + \Lambda_\beta(\alpha) \ddot{\alpha}$$

(N.B. L'apice rappresenta la derivata fatta per l'argomento della funzione).

Pertanto avremo

$$\ddot{\beta}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = a \left[\frac{(\beta'(\alpha) - 1) \sin(\alpha - \beta(\alpha))}{x(\alpha)} - \frac{x'(\alpha) \cos(\alpha - \beta(\alpha))}{x^2(\alpha)} \right] \dot{\alpha}^2 + \frac{a}{x(\alpha)} \cos(\alpha - \beta(\alpha)) \ddot{\alpha}$$

$$\ddot{x}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = a (1 - \beta'(\alpha)) \cos(\alpha - \beta(\alpha)) \dot{\alpha}^2 + a \sin(\alpha - \beta(\alpha)) \ddot{\alpha}$$

Se si considerano un momento movente M sulla manovella e una forza F qualsivoglia orientata o posizionata sul bilanciante, lo studio dinamico del meccanismo si può condurre mediante il bilancio delle potenze. Per scriverlo abbiamo bisogno di

$$E_a^c = \frac{1}{2} J_a^c \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_a v_{G_a}^2 = \frac{1}{2} (J_a^c + m_a g_a^2) \dot{\alpha}^2$$

$$E_b^c = \frac{1}{2} J_b^c \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_b v_{G_b}^2 = \frac{1}{2} (J_b^c + m_b g_b^2) \dot{\beta}^2$$

$$E_c^c = \frac{1}{2} J_c^G \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_c v_{G_c}^2 = \frac{1}{2} J_c^G \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_c v_A^2 = \frac{1}{2} J_c^G \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_c |ia\dot{\alpha}e^{i\alpha}|^2$$

$$= \frac{1}{2} J_c^G \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_c [(-a\dot{\alpha} \sin \alpha)^2 + (a\dot{\alpha} \cos \alpha)^2] = \frac{1}{2} J_c^G \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_c a^2 \dot{\alpha}^2$$

$$\frac{d}{dt} E_{tot}^c = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (J_a^G + m_a g_a^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} (J_b^G + m_b g_b^2) \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} J_c^G \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_c a^2 \dot{\alpha}^2 \right]$$

$$= (J_a^G + m_a g_a^2 + m_c a^2) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + (J_b^G + m_b g_b^2 + J_c^G) \dot{\beta} \ddot{\beta}$$

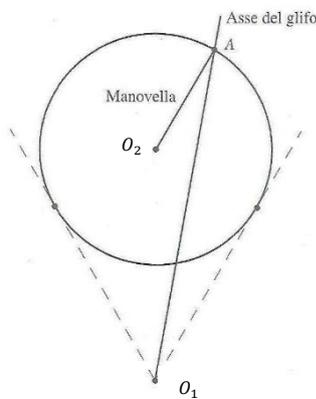
$$W^F = \vec{F} \cdot \vec{v}_P = -F_x p \dot{\beta} \sin \beta + F_y p \dot{\beta} \cos \beta$$

$$W^M = M \dot{\alpha}$$

Allora il bilancio delle potenze $\frac{d}{dt} E_{tot}^c = W^F + W^M$ è

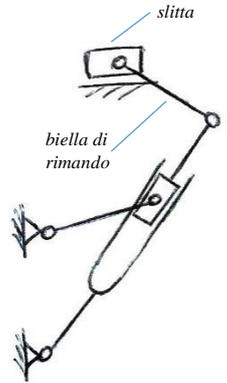
$$(J_a^G + m_a g_a^2 + m_c a^2) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + (J_b^G + m_b g_b^2 + J_c^G) \dot{\beta} \ddot{\beta} = -F_x p \dot{\beta} \sin \beta + F_y p \dot{\beta} \cos \beta + M \dot{\alpha}$$

Il glifo oscillante è il meccanismo alla base del funzionamento di una slitta portautensile per merito della sua semplicità: infatti in alcune lavorazioni come quelle per asportazione di truciolo è necessario che il pezzo si muova più lentamente mentre viene lavorato ma anche che venga portato via a fine processo – per fare spazio al nuovo – più velocemente possibile. Col meccanismo in questione si evita dunque di dover installare un motore a velocità variabile che richiede la presenza di sistemi di controllo; se si collega l'estremità

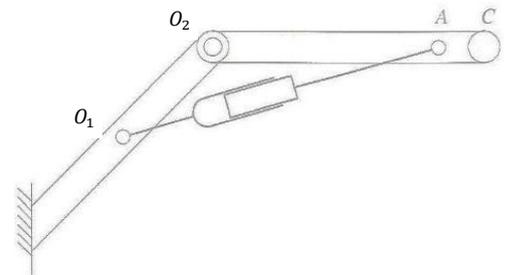


del glifo tramite una biella di rimando alla slitta, si realizzano due traslazioni di quest'ultima mentre il motore in O_2 opera a velocità costante: una mentre A percorre l'arco di circonferenza di lunghezza maggiore tra le due posizioni di inversione del moto, l'altra mentre percorre quello di lunghezza minore. Semplici considerazioni geometriche portano alla conclusione che sarà tanto più lungo il primo arco e corto il secondo quanto più le cerniere di bilanciere e manovella sono vicine e altrettanto semplici considerazioni cinematiche portano a scrivere che

$$\frac{\text{tempo andata}}{\text{tempo ritorno}} = \frac{\text{arco maggiore}}{\text{arco minore}}$$



Il glifo oscillante è anche il meccanismo alla base anche di alcuni bracci di sollevamento se infatti lo scorrimento della coppia prismatica fosse controllato da un attuatore oleodinamico (che controlla riempimento e velocità di riempimento di un volume cilindrico), il meccanismo sarebbe in grado, essendo O_1A movente, di sollevare un carico posto in C , essendo quindi O_2C l'elemento cedente. Un impianto di sollevamento di tale sorta differisce da uno che si basa sul quadrilatero articolato in quanto in grado di sollevare carichi di maggiore intensità ma con minore precisione, minore velocità di risposta e difficoltà di installazione maggiore.



5) Attrito e leggi di Coulomb

Descrivere l'attrito secondo i seguenti passi:

- a) l'effetto del contatto tra solidi, i fenomeni nocivi e quelli ricercati, l'influenza del tipo ed estensione del contatto sull'attrito;
- b) l'interpretazione fisica del fenomeno;
- c) la legge di Coulomb per l'attrito statico e il modello matematico che ne discende;
- d) la legge di Coulomb per l'attrito dinamico e in particolare i modelli matematici per
 - i. la forza d'attrito,
 - ii. la potenza dissipata e
 - iii. la formulazione infinitesima;
- e) considerazioni su valori sperimentali dei coefficienti di attrito statico f_s e dinamico f_d ;
- f) i modelli che estendono le leggi di Coulomb permettendo una transizione continua tra i coefficienti f_s e f_d ;
- g) la verifica di aderenza per una ruota con contatto di puro rotolamento, a cui sono applicate una coppia motrice e una forza di traino.

Il contatto tra due solidi può dare luogo a fenomeni di attrito e di usura. Il primo si definisce come la resistenza al moto relativo che si manifesta quando un corpo striscia su un altro, mentre il secondo è la perdita progressiva di materiale dalla superficie di un corpo come risultato del moto relativo. Entrambi possono risultare desiderati o indesiderati: l'attrito è ricercato se è necessaria l'aderenza tra i due corpi, come nel vincolo di puro rotolamento, nocivo se provoca perdita di potenza meccanica; l'usura è il fenomeno alla base di alcune lavorazioni meccaniche superficiali di rifinitura ma va ridotta il più possibile quando provoca lo stravolgimento delle tolleranze geometriche e dimensionali in una coppia cinematica dando vita a imprecisioni e vibrazioni.

Si può classificare il contatto tra solidi in base alla geometria del contatto. Se li consideriamo perfettamente rigidi, troviamo contatti puntuali, lineari o superficiali in base all'ente geometrico di contatto tra i corpi. È chiaro che nella realtà ogni corpo è deformabile e l'interfaccia di contatto è sempre una superficie.

Si può anche fare una classificazione in base alla cinematica:

- se le componenti tangenziale e normale della velocità relativa sono nulle, il contatto è di puro rotolamento;
- se è nulla la componente normale della velocità relativa ma non quella tangenziale si manifesterà un contatto con strisciamento;
- se la componente normale della velocità relativa è non nulla assisteremo a urto o distacco.

Vedremo che nel modello coulombiano adottato nessuna di queste caratterizzazioni influenza l'attrito se non per il fatto che la forza d'attrito (dinamico) sarà sempre orientata come il versore del vettore velocità relativa.

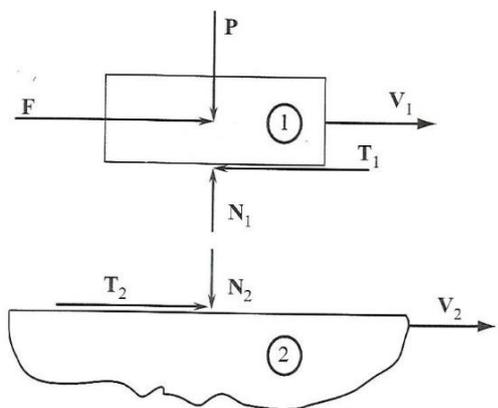
L'interpretazione fisica del fenomeno discende da considerazioni di carattere microscopico. Qualsiasi superficie solida infatti – per quanto liscia – presenta delle asperità, i picchi delle quali sono ciò che viene a contatto quando si pongono a contatto due corpi. Tra questi picchi si formano delle microsaldature che sono la fonte microscopica della resistenza macroscopica che si avverte durante lo strisciamento. L'attrito impedirà il moto in primo luogo quando le microsaldature tutte insieme riescono a generare una forza tale da bilanciarne (staticamente) una esterna movente e lo ostacolerà concorrendo al bilancio dinamico quando e se tale forza esterna sarà riuscita a rompere le microsaldature.

Da tale interpretazione nascono le leggi di Coulomb per l'attrito. La prima, per l'attrito statico, impone che (se \vec{T} ed \vec{N} sono le componenti tangenziale e normale della reazione vincolare tra i corpi)

$$T \leq f_s N$$

f_s è detto coefficiente di attrito statico, viene determinato sperimentalmente ed è solo funzione della natura della coppia di materiali a contatto.

Essendo una disequazione, tale legge non può essere usata per la ricerca delle componenti della reazione vincolare, ma solo per verifica: un problema andrà studiato supponendo $\vec{v}_{rel} = 0$, ricavando \vec{T} ed \vec{N} dal bilancio statico e poi solo in ultima istanza verificando che sia verificata la condizione di attrito statico fornita.



Se così non è, occorrerà considerare la presenza di attrito dinamico, per cui si ha una seconda legge di Coulomb. Se \vec{T}_1 ed \vec{N}_1 sono le componenti tangenziale e normale della reazione vincolare tra i corpi agente sul corpo 1 mentre \vec{T}_2 ed \vec{N}_2 le componenti della reazione agente sul corpo 2 e, definita $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ e il suo versore $\hat{u}_{rel} = \frac{\vec{v}_{rel}}{|\vec{v}_{rel}|}$, avremo che

$$\vec{T}_1 = f_d N_1 \hat{u}_{rel}$$

oppure

$$\vec{T}_2 = -f_d N_2 \hat{u}_{rel}$$

(in ogni caso $T_1 = T_2 = T$ e $N_1 = N_2 = N$).

f_d è detto coefficiente di attrito dinamico, viene determinato sperimentalmente ed è solo funzione della natura della coppia di materiali a contatto.

La seconda legge di Coulomb è un'equazione che partecipa al bilancio e utile per trovare la soluzione del problema dinamico.

Si vede facilmente che la presenza di attrito dinamico ha implicazioni in termini energetici. La potenza spesa dalla componente tangenziale della reazione vincolare è la potenza spesa da \vec{T}_1 e \vec{T}_2 sulle velocità \vec{v}_1 e \vec{v}_2 dei corpi:

$$W_{attr} = \vec{T}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{T}_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{T}_1 \cdot \vec{v}_1 - \vec{T}_1 \cdot \vec{v}_2 = -\vec{T}_1 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -\vec{T}_1 \cdot \vec{v}_{rel}$$

oppure

$$W_{attr} = -\vec{T}_2 \cdot \vec{v}_1 + \vec{T}_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{T}_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{T}_2 \cdot \vec{v}_{rel}$$

Essendo \hat{u}_{rel} il versore di \vec{v}_{rel} e sostituendo la seconda legge di Coulomb, si ha in entrambi i casi

$$W_{attr} = -f_d N v_{rel}$$

sempre negativa perché l'attrito è sempre dissipativo.

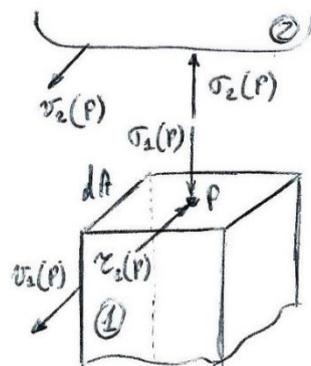
È utile però riflettere sul fatto che, essendo l'interfaccia di contatto sempre una superficie, T ed N siano in realtà le risultanti di sforzi distribuiti su suddetta superficie, nei punti P della quale la velocità relativa è in generale non uniforme. Allora si può adottare un modello coulombiano locale

$$\vec{\tau}_1(P) = f_d \sigma_1(P) \hat{u}_{rel}(P)$$

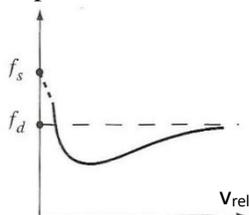
tale che $d\vec{T}_1 = \vec{\tau}_1(P) dA$.

Così la potenza dissipata (infinitesima) è

$$dW_{attr} = -d\vec{T}_1 \cdot \vec{v}_{rel}(P) = -\vec{\tau}_1(P) dA \cdot \vec{v}_{rel}(P) = -f_d \sigma_1(P) v_{rel}(P) dA$$



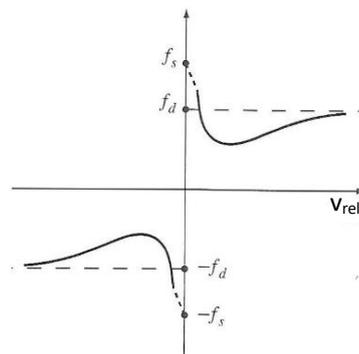
Sperimentalmente si nota che sia in caso di contatto di superfici asciutte che di lubrificazione limite il coefficiente di attrito statico risulta maggiore di quello di attrito dinamico e che, nonostante sia stata ipotizzata la non dipendenza di f_d dalla velocità relativa, ciò non si possa dire per valori sufficientemente bassi di quest'ultima. Infatti l'andamento del coefficiente di attrito in funzione della velocità relativa (che permette di dare la rappresentazione di una transizione continua tra f_s e f_d poiché "la natura non fa salti") è in figura (a sinistra).

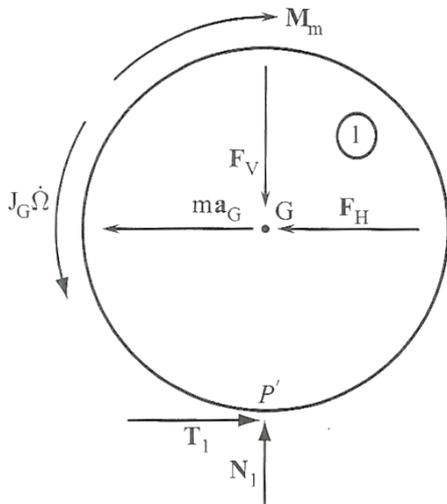


Notiamo come la curva sia estremamente ripida laddove deve sostituire la discontinuità ma anche come abbia un minimo seguito da un tratto a pendenza crescente che tende asintoticamente a f_d . Ci saranno criticità proprio nel tratto più ripido (quindi per v_{rel} bassissime): piccole variazioni di velocità causano sensibili variazioni del coefficiente e quindi della forza di attrito, dando vita a vibrazioni indesiderate (fenomeno "stick and slip").

La discontinuità crea problemi anche quando c'è inversione del moto. Immaginiamo che in un problema monodimensionale il segno di v_{rel} (quindi il verso della forza di attrito) sia contenuto nel coefficiente di attrito; allora posso tracciare il grafico in figura.

Nell'intorno di $v_{rel} = 0$ la forza d'attrito passa dall'aver un certo valore in un verso ad avere lo stesso valore nel verso opposto, quindi ho una discontinuità pari a due volte quel valore! Si assisterà anche qui a forti fenomeni di instabilità e vibrazioni.





Si verifichi ora la condizione di aderenza tra una ruota (di raggio r , massa m , momento d'inerzia J_G rispetto al centro di massa G e velocità angolare Ω) e un vincolo piano.

Si ipotizza dapprima il puro rotolamento, quindi il fatto che il punto di contatto sia il centro di istantanea rotazione del moto. Allora si risolve con un diagramma di corpo libero dove:

- F_V ed F_H sono il carico verticale e orizzontale della ruota;
- M_m è la coppia motrice;
- ma_G e $J_G\dot{\Omega}$ sono forza e coppia d'inerzia;
- T_1 ed N_1 le reazioni vincolari.

Il bilancio è

$$\begin{cases} N_1 = F_V \\ T_1 = F_H + ma_G \\ M_m = rT_1 + J_G\dot{\Omega} \end{cases}$$

(in un problema di dinamica diretta – quindi con cinematica incognita – tre equazioni sono necessarie e sufficienti a trovare N_1 , T_1 e $a_G = r\dot{\Omega}$)

Calcolati T_1 ed N_1 , si verifica che

$$T_1 \leq f_s N_1$$

Se ciò non fosse vero, si dovrebbero ricalcolare le forze aggiungendo al bilancio la seconda legge di Coulomb, quindi

$$\begin{cases} N_1 = F_V \\ T_1 = F_H + ma_G \\ M_m = rT_1 + J_G\dot{\Omega} \\ T_1 = f_d N_1 \end{cases}$$

N.B. Ora che c'è strisciamento a_G e $\dot{\Omega}$ sono variabili indipendenti (ecco spiegata la comparsa di una quarta equazione) poiché il centro d'istantanea rotazione si sarà spostato in una posizione dipendente dalla risoluzione del problema stesso

6) Resistenza al rotolamento

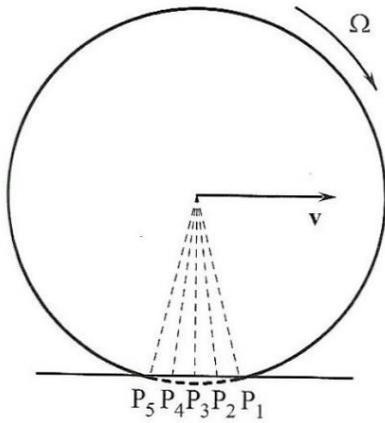
Si descriva la resistenza a rotolamento e in particolare:

- a) i meccanismi che permettono di spiegare il fenomeno;
- b) il parametro e il coefficiente di attrito volvente con considerazioni sul loro valore, la potenza dissipata tramite i casi di sola forza trainante e sola coppia motrice;
- c) l'interpretazione cinematica della potenza dissipata;
- d) la dinamica di un disco che rotola senza strisciare in moto vario a cui sono applicate una coppia motrice e una forza di traino;
- e) un modello complementare di resistenza al rotolamento quando una reazione vincolare tangenziale non trascurabile produce micro-scorrimenti, definendo
 - i. il micro-scorrimento adimensionale ϵ ,
 - ii. la reazione tangenziale e
 - iii. il coefficiente per la reazione tangenziale complementare come funzione del micro-scorrimento ϵ per il caso pneumatico-strada e ruota rotaia.

Quando si fa rotolare – ad esempio – un disco su un piano, si osserva che anche in assenza di altre forme di attrito questo perde progressivamente energia ed eventualmente si ferma: per mantenere un moto costante occorre aggiungere una coppia o una forza trainanti. Per spiegare tale fenomeno, che chiamiamo resistenza a rotolamento, occorre abbandonare l'ipotesi di corpo perfettamente rigido, almeno per quanto riguarda il disco: il contatto anziché essere lineare sarà distribuito su una superficie grossomodo rettangolare e su tale impronta osserveremo delle distribuzioni di deformazione ϵ e di pressione σ .

Nel caso di disco fermo la teoria di Hertz fornisce una distribuzione di deformazione simmetrica rispetto alla mezzeria del disco (di forma ellittica) e, per la legge di Hooke $\sigma = E\epsilon$, una simile distribuzione per le pressioni.

Nel caso di disco che rotola senza strisciare la distribuzione di deformazione è sempre simmetrica e, nel caso di comportamento perfettamente elastico del materiale, anche per le pressioni sarà così: se infatti si segue l'andamento di deformazioni che uno stesso punto subisce durante il rotolamento (sequenza P_1, P_2 ,

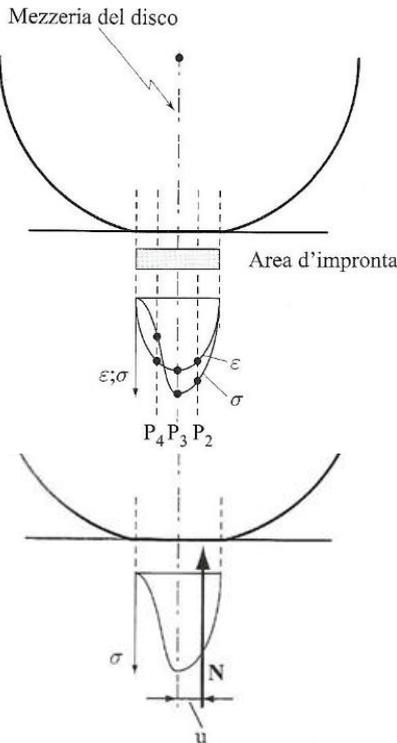
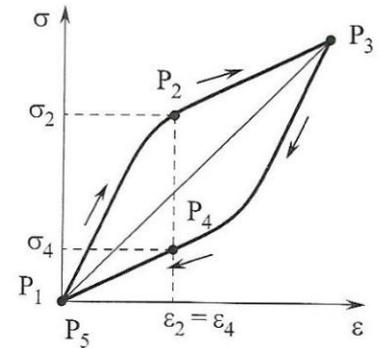
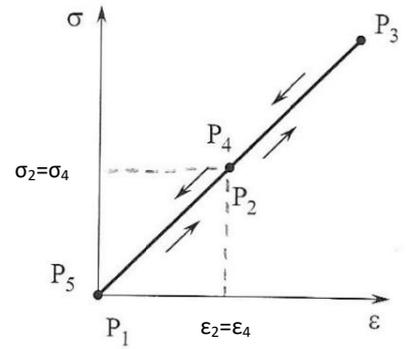


P_3, P_4 e P_5), si vede che – essendo sovrapposte le rette di salita e di discesa sul diagramma stress-strain – a deformazioni simmetriche (vedi ϵ_2 ed ϵ_4) corrispondono σ simmetriche (vedi σ_2 ed σ_4).

Se invece il materiale fosse anelastico, assisteremmo sul diagramma stress-strain a un ciclo di isteresi che farebbe sì che la stessa deformazione dia vita a pressioni diverse (maggiori in

compressione e minori durante il rilascio), rendendo asimmetrica la distribuzione di queste. L'energia meccanica specifica dissipata è rappresentata proprio dall'area inclusa ciclo di isteresi.

Non è tuttavia conveniente affrontare il problema in questi termini a causa dell'imprecisione nelle misure che occorrerebbe prendere e dell'onerosità di dover lavorare con corpi deformabili, per cui si ricorre al modello di attrito volvente (il termine "attrito" è qui usato impropriamente e solo per analogia essendoci qui potenza dissipata).



Si ragiona sul fatto che la dissimmetria delle σ non fa altro che porre la risultante di queste ultime, quindi la reazione vincolare normale N , un po' più avanti rispetto alla mezzeria del disco di una lunghezza u . Questo genera la formazione di una coppia antioraria di valore uN che è la responsabile, in assenza di un momento motore, dell'arresto del disco. Maggiore è u e maggiore è la resistenza a rotolamento a parità di carico verticale, ma conviene adimensionalizzare tale parametro col raggio R della ruota, definendo quindi il coefficiente di attrito volvente:

$$f_v = \frac{u}{R}$$

Si noti come sia stato salvato il modello di corpo rigido (infatti possiamo immaginare il disco comunque sia rigido e tradurre l'effetto delle deformazioni nello spostamento di N) e come, ricavando un'espressione per la potenza dissipata come verrà fatto tra poco, le misurazioni per stabilire il valore di f_v (o u) rimangano più agevoli necessitando di soli parametri macroscopici e facilmente imposti durante la campagna sperimentale.

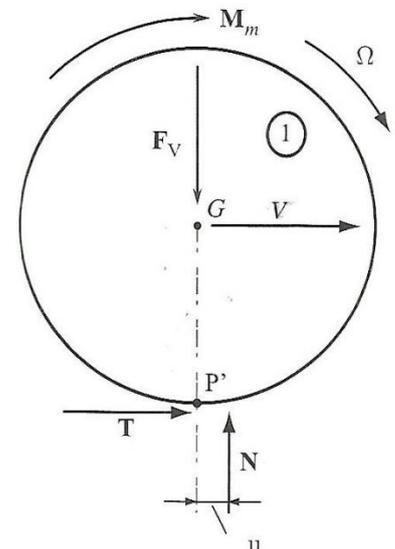
Valori tipici di f_v sono $1 \div 2 \cdot 10^{-2}$ per il contatto pneumatico-strada e $1 \div 5 \cdot 10^{-3}$ per quello acciaio-acciaio.

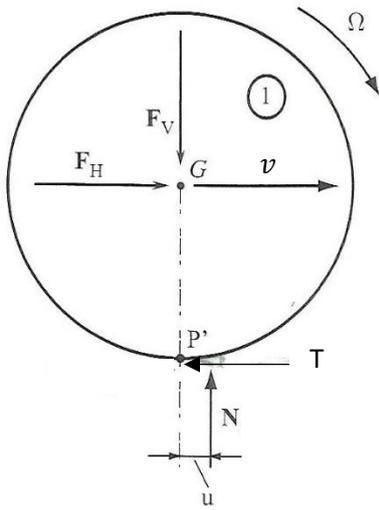
Prendiamo il caso di un disco rotante con velocità angolare Ω costante mantenuto in movimento da una coppia motrice M_m . Le equazioni di bilancio dinamico restituiscono

$$\begin{cases} N = F_V \\ T = 0 \\ M_m = u N \end{cases}$$

La potenza necessaria per mantenere il disco in moto è la stessa (in modulo, in realtà è opposta – quindi sempre negativa perché uscente dal sistema) che bisogna fornire dall'esterno

$$|W_{diss}| = M_m \Omega = u N \Omega = u N \frac{v}{R} = f_v N v$$





Invece nel caso di disco mantenuto in movimento da una forza trainante F_H il bilancio è

$$\begin{cases} N = F_V \\ T = F_H \\ R F_H = u N \end{cases}$$

La potenza necessaria per mantenere il disco in moto è la stessa (in modulo) che bisogna fornire dall'esterno

$$|W_{diss}| = F_H v = \frac{u}{R} N v = f_v N v = f_v N \Omega R = u N \Omega$$

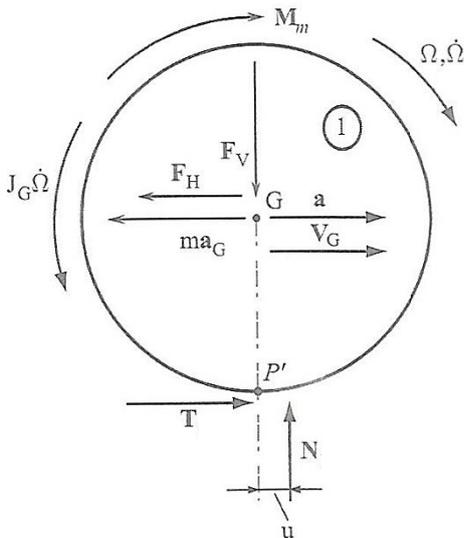
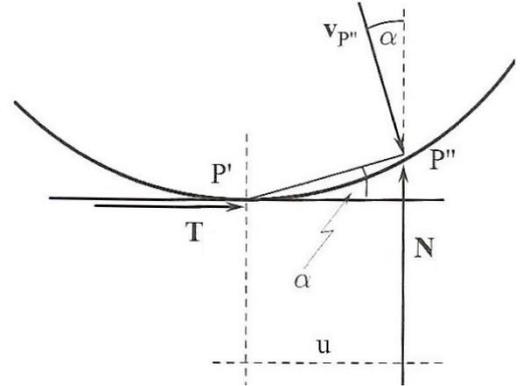
In entrambi i casi l'espressione della potenza dissipata è la stessa e dipende linearmente attraverso f_v (oppure u) da N e da v (oppure Ω).

Si può inoltre fornire un'interpretazione cinematica dell'espressione di W_{diss} trovata. Infatti si vede che la retta d'azione di N cade su un punto del disco con velocità non nulla P'' che in particolare vale, essendo P' il centro d'istanteanea rotazione e Ω la velocità angolare del moto rigido:

$$v_{P''} = P'P''\Omega = \frac{u}{\cos \alpha} \Omega$$

Allora

$$W_{diss} = \vec{N} \cdot \vec{v}_{P''} = -N \frac{u}{\cos \alpha} \Omega \cos \alpha = -u N \Omega$$



Si studia ora la dinamica di un disco rotante senza strisciamento che subisce resistenza a rotolamento e deve trasportare un carico verticale F_V e una forza di traino F_H , movimentato da una coppia M_m .

Per il diagramma di corpo libero il bilancio è

$$\begin{cases} N = F_V \\ T = F_H + m a_G \\ M_m = J_G \dot{\Omega} + r T + u N \end{cases}$$

Sostituendo le prime due equazioni nella terza e ricordando che $\dot{\Omega} = \frac{a_G}{r}$ si ha

$$\begin{aligned} M_m &= \frac{J_G}{r} a_G + r(F_H + m a_G) + u F_V \Rightarrow \\ \Rightarrow a_G &= \frac{\frac{M_m}{r} - F_H - f_v F_V}{\frac{J_G}{r^2} + m} \end{aligned}$$

ma anche

$$\dot{\Omega} = \frac{M_m - r F_H - f_v r F_V}{J_G + m r^2}$$

Se si volesse usare il bilancio delle potenze:

$$E^c = \frac{1}{2} (J_G + m r^2) \Omega^2 \Rightarrow \frac{dE^c}{dt} = (J_G + m r^2) \Omega \dot{\Omega}$$

$$W^{M_m} = \vec{M}_m \cdot \vec{\Omega} = M_m \Omega$$

$$W^{F_H} = \vec{F}_H \cdot \vec{v}_G = -F_H \Omega r$$

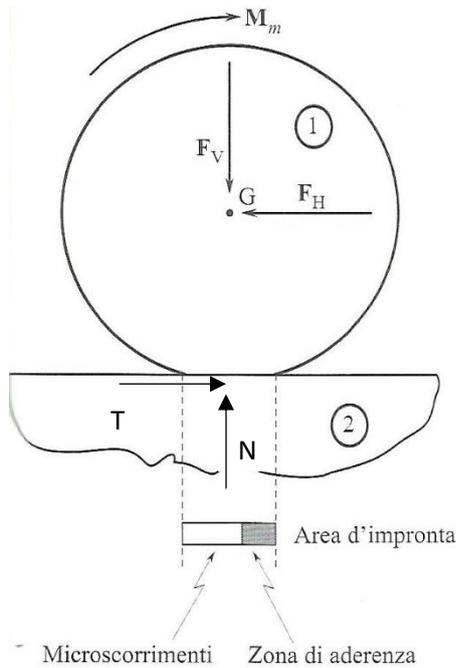
$$W_{diss} = -N f_v v_G = -N f_v \Omega r \quad (\text{negativa perché sempre dissipativa})$$

Quindi ho

$$M_m \Omega - F_H \Omega r - N f_v \Omega r = (J_G + m r^2) \Omega \dot{\Omega}$$

che porta allo stesso risultato.

Risolta la dinamica, bisognerebbe ora verificare che $T \leq f_s N$.



Esistono fenomeni che il modello coulombiano di attrito non riesce a spiegare, come la tendenza di un veicolo a sovra o sotto-sterzare in curva o l'instabilità nella marcia di un treno che raggiunge alte velocità. Si introduce dunque il modello "dei micro-scorrimenti", che chiama di nuovo in ballo la deformazione. Si osserva infatti che l'area d'impronta è bipartita in:

- una zona di aderenza dalla parte del lembo di imbocco dove vale la condizione di attrito statico e che cresce col diminuire della reazione vincolare tangenziale e
- una zona dei micro-scorrimenti dove si manifestano piccoli slittamenti tra ruota e vincolo che, al contrario, cresce col crescere della reazione tangenziale.

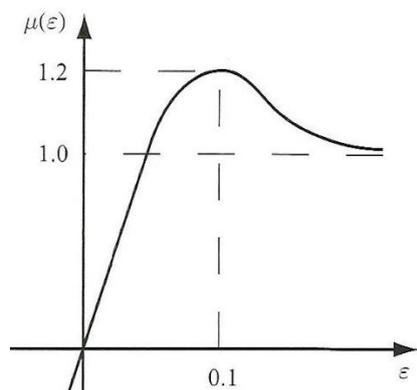
Essendovi questi micro-scorrimenti, il "punto" di contatto non è più centro d'istantanea rotazione, bensì questo si sposta un po' più verso il centro del disco, facendo sì che la sua velocità v_G sia leggermente minore di Ωr . Introduciamo un parametro che quantifichi questa variazione, detto micro-scorrimento adimensionale

$$\epsilon = \frac{v_{rel}}{v_G} = \frac{\Omega r - v_G}{v_G}$$

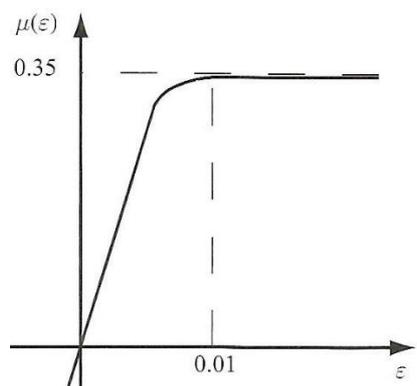
Si riscrive dunque una variante della legge di Coulomb per l'attrito dinamico:

$$\vec{T} = \mu(\epsilon) N \hat{u}_{rel}$$

dove $\mu(\epsilon)$ è una generalizzazione del coefficiente d'attrito che dipende dal micro-scorrimento adimensionale e che ha andamento



per il contatto pneumatico-strada e



per il contatto ruota-rotaila.

7) Usura e frizione a dischi

Descrivere l'usura esponendo i seguenti argomenti:

- descrizione generale del fenomeno sottolineando gli aspetti progressivi e gli effetti sul funzionamento e la vita operativa delle macchine;
- classificazione nei tipi adesivo, abrasivo, corrosivo e per fatica superficiale;
- criteri per la riduzione dell'usura;
- modello elementare di Archard (Reye) sia per moto relativo di traslazione sia per superfici infinitesime;
- frizione a dischi con calcolo della coppia massima trasmissibile.

L'usura è la rimozione di materiale dalla superficie di corpi a contatto soggetti a moto relativo. È la causa più frequente che porta una macchina ad andare fuori servizio (più rare sono la rottura di un componente o l'obsolescenza). Nella maggior parte dei casi è un fenomeno da evitare in quanto tale rimozione di materiale porta all'alterazione dei giochi negli accoppiamenti, causando immediatamente – ad esempio – perdite di tenuta oppure – in cascata – urti e vibrazioni che amplificano dinamicamente i carichi, il che velocizza l'ulteriore usura, portando in breve tempo a stravolgere le tolleranze geometriche e quindi provocando l'uscita dal servizio. Capita tuttavia che l'usura venga ricercata, come ad esempio in freni e frizioni, nella lappatura piuttosto oppure in casi in cui l'usura funge da segnale di imminente guasto (l'eccessiva usura di uno pneumatico è sintomatica della necessità di sostituzione).

L'usura si classifica in:

- adesiva
le punte delle asperità microscopiche della superficie di un materiale si saldano quando a contatto (statico o con moto relativo) con quelle di un altro materiale; le microsaldature vanno tuttavia incontro a rottura col moto relativo stesso e si verifica asportazione di materiale che resta attaccato a una delle due superfici o rilasciato sotto forma di frammenti liberi; non è mai possibile da evitare completamente;
- abrasiva
le punte delle asperità microscopiche della superficie di un materiale particolarmente duro rompono quelle del materiale più morbido, rilasciando particelle libere che alimentano a loro volta il fenomeno;
- corrosiva
la formazione di ossidi per attacco ambientale sulla superficie di un metallo può essere fenomeno ricercato quando tale ossido protegge il materiale sottostante dal subire la stessa reazione; se per usura lo strato di ossido è rimosso, ciò non si verifica e anche gli strati sottostanti sono colpiti dando vita a un circolo vizioso in cui azione meccanica e chimica si alimentano l'un l'altra;
- per fatica superficiale
si nota che due superfici soggette a rotolamento subiscono per fatica la formazione di cricche nel materiale loro sottostante le quali, se avanzano, portano al distacco di frammenti.

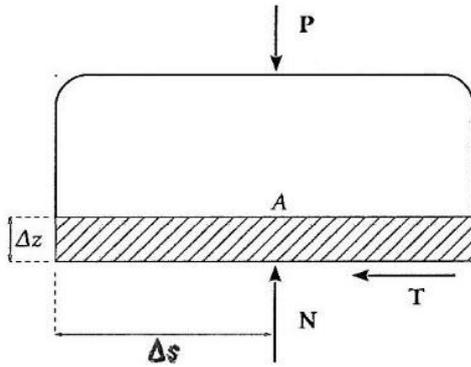
I criteri per la riduzione dell'usura sono:

- lubrificazione
l'interposizione di un fluido tra due superfici ne riduce l'area effettiva di contatto (quindi il coefficiente di usura che si introdurrà nel modello di Archard) per quanto riguarda usura abrasiva e adesiva; per quanto riguarda quella corrosiva, impedisce a un agente esterno di attaccare la superficie;
- sceita dei materiali a contatto
scegliere due metalli con ridotta affinità chimica perfette a meno microsaldature di formarsi, diminuendo l'usura;
- trattamento termochimico delle superfici
trattamenti come carburazione, nitrurazione o fosfatizzazione della superficie di un metallo non solo lo indurisce in superficie, ma cambia le sue proprietà rendendolo meno affine chimicamente ad altri metalli quando con essi a contatto;
- finitura superficiale
una ridotta scabrosità superficiale riduce i fenomeni di usura abrasiva e adesiva.

Il modello di Archard per l'usura si rivela essere il più usato per semplicità ed efficacia (particolarmente alta se, dei due materiali a contatto, uno si consuma più dell'altro) e si basa sul postulato che il volume rimosso per usura ΔV sia proporzionale al lavoro della forza d'attrito L_a :

$$\Delta V = kL_a$$

(k è il coefficiente di proporzionalità misurato sperimentalmente).



Il volume usurato è il prodotto tra l'area d'impronta A e lo spessore consumato Δz , mentre il lavoro d'attrito è (in modulo) il prodotto tra la forza tangenziale T tra i corpi e la lunghezza dello strisciamento Δs ; eppure, per la legge di Coulomb, vale che $T = f_d N$. Allora:

$$A \Delta z = k f_d N \Delta s$$

Si definisce tasso d'usura U lo spessore usurato per strisciamento unitario:

$$U = \frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{k f_d N}{A}$$

Derivando rispetto al tempo si vede che il rateo di usura del volume è proporzionale alla potenza delle forze d'attrito:

$$\dot{V} = k W_a = k f_d N \dot{s}$$

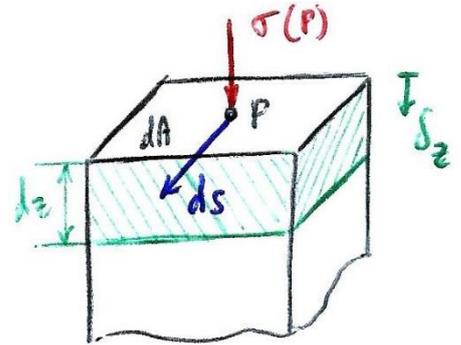
(\dot{s} è la velocità di strisciamento).

Quanto appena detto per volumi finiti può essere scritto anche per gli infinitesimi (relazione locale): l'area d'impronta sarà dA , lo spessore consumato dz , la forza tangenziale $dT = \tau dA$ (per cui vale Coulomb locale: $\tau = f_d \sigma$) e lo strisciamento ds . In più, si esplicherà la dipendenza dal punto P . Detto ciò, Archard si scrive:

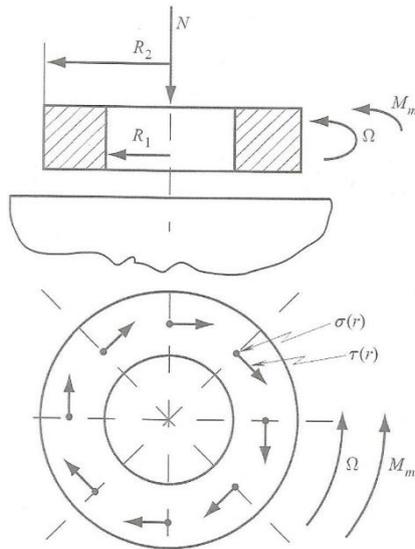
$$dV = k dL_a \Rightarrow dz(P)dA = k f_d \sigma(P)dA ds(P)$$

Dopo aver semplificato dA , la derivazione per il tempo a entrambi i membri fornisce una legge per $\delta_z = \frac{dz}{dt}$ velocità di logoramento locale:

$$\delta_z(P) = k f_d \sigma(P) \dot{s}(P)$$



Esempio – Frizione a dischi



Qual è la coppia massima trasmissibile da una frizione a dischi avente velocità relativa Ω tra ferodo e flangia, la cui usura è considerevole tutta a carico del ferodo di sezione corona circolare?

Notiamo che la velocità di strisciamento è funzione di un punto sul ferodo, in particolare funzione del raggio:

$$\dot{s}(r) = \Omega r$$

Postuliamo poi che la velocità di logoramento δ_z sia uniforme su tutta l'area: infatti, se così non fosse, una zona si usurerebbe più dell'altra e si perderebbe la condizione di planarità. Allora:

$$\delta_z(P) = \delta_0$$

Pertanto la legge di Archard locale si scrive $\delta_0 = k f_d \sigma(P) \Omega r$ e ciò significa che

$$\sigma(P) = \sigma(r) = \frac{\delta_0}{k f_d \Omega r} = \frac{k_\sigma}{r}$$

dove k_σ è una costante da determinare con un'integrazione di $\sigma(r)$

sull'area della corona circolare: la quantità fornita è la forza $N = \int_A \sigma(r) dA$ di pressione tra i dischi, supposta nota o comunque parametro per la regolazione della coppia trasmissibile.

Si considera che una spirale infinitesima abbia area $dA = 2\pi r dr$, quindi

$$N = \int_{R_1}^{R_2} \frac{k_\sigma}{r} 2\pi r dr = 2\pi k_\sigma (R_2 - R_1) \Rightarrow k_\sigma = \frac{N}{2\pi(R_2 - R_1)}$$

La coppia trasmissibile sarà l'integrale dei momenti degli sforzi tangenziali sulla corona circolare:

$$\begin{aligned} M_m &= \int_A \vec{r} \times \vec{\tau}(r) dA = \int_{R_1}^{R_2} r \tau(r) 2\pi r dr = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} f_d \sigma(r) r^2 dr = 2\pi f_d \int_{R_1}^{R_2} \frac{k_\sigma}{r} r^2 dr \\ &= \frac{f_d N}{(R_2 - R_1)} \int_{R_1}^{R_2} r dr = \frac{f_d N}{(R_2 - R_1)} \frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) = \frac{f_d N}{2} (R_1 + R_2) \end{aligned}$$

(dove sono state usate in ordine: perpendicolarità di \vec{r} e $\vec{\tau}$, Coulomb locale $\tau = f_d \sigma$, la relazione per $\sigma(r)$ e quella per k_σ , ricavate sopra).

8) Coppie cinematiche lubrificate

Per le coppie cinematiche, descrivere:

- a) i vari tipi di lubrificazione;
- b) i lubrificanti più comuni e le condizioni di utilizzo;
- c) un modello elementare per la lubrificazione idrodinamica delle coppie cinematiche, specificando i seguenti punti:
 - i. campi di applicazione della teoria della lubrificazione fluidodinamica;
 - ii. il modello fisico e i limiti di validità;
 - iii. il procedimento che conduce alle relazioni tra velocità e pressione;
 - iv. l'equazione di continuità della massa;
 - v. la distribuzione della velocità, partendo dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \tau_z}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{cases} \quad \begin{cases} q_x = \int_0^h u \, dy \\ q_z = \int_0^h w \, dy \\ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

- vi. l'equazione di Reynolds nel caso generale;
- vii. le condizioni in cui la trattazione mono-dimensionale è accettabile, ricavando: l'equazione di Reynolds monodimensionale, la sezione in cui la pressione è massima, le forze normali e tangenziali risultanti e i risultati nel caso di meato a pareti piane.

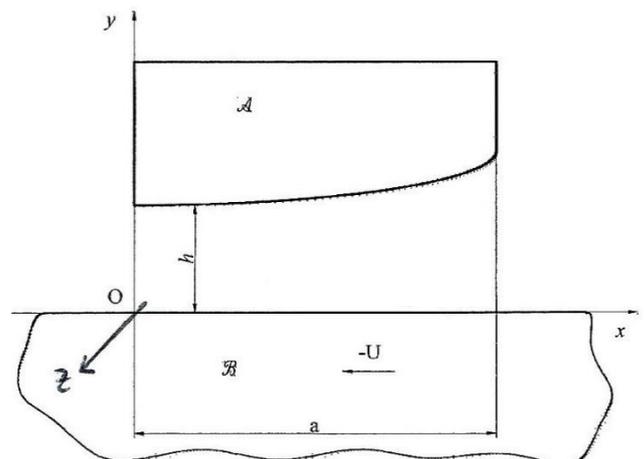
Si possono avere due tipi di lubrificazione:

- lubrificazione limite
a causa di fenomeni elettrostatici o chimici il lubrificante, applicato con spessore molecolare, aderisce alle superfici striscianti formando in alcuni casi saponi che facilitano il moto e in altri – reagendo con le superfici – solfuri o cloruri responsabili di un'usura (controllata) che riduce in fase di rodaggio le imperfezioni lasciate dalle lavorazioni meccaniche; le velocità di strisciamento sono basse e i coefficienti di attrito si aggirano intorno a 0.1;
- lubrificazione mediata
tra le superfici striscianti è interposto uno strato di lubrificante dello spessore di qualche decimo di millimetro che separa completamente le superfici ma che, essendo la maggior parte delle volte liquido, dev'essere in grado di reggere le forze normali che tenderebbero a spingerlo via e riavvicinare le superfici stesse: ciò si ottiene per pressione idrodinamica, ossia si fa sì che il movimento imposto al fluido generi una pressione tale da sostenere le forze presenti, o per pressione idrostatica, per la quale è necessaria la presenza di un circuito oleodinamico esterno; le velocità di strisciamento sono medio-alte e i coefficienti di attrito si aggirano intorno a 0.01.

I lubrificanti più comuni sono:

- liquidi: oli minerali od oli sintetici, usati nella maggior parte delle applicazioni;
- solidi: grafiti e bisolfuro di molibdeno, adatti a impieghi con temperature e pressioni elevate;
- grassi: miscele a base di sostanze saponose, per impieghi ad alte pressioni, basse velocità relative e movimento non continuativo ma non resistenti all'acqua e incapaci di proteggere da corrosione;
- gas: dall'elio o l'azoto fino all'aria, sono prescritti per velocità di esercizio elevate ma richiedono un circuito pneumatico esterno che li rende abbastanza costosi.

Per cuscinetti assiali (vedi cuscinetti Mitchell) o radiali (vedi le coppie rotoidali di una turbina o delle linee d'asse porta-elica di una nave) che richiedano lubrificazione idrodinamica si applica il modello fisico in figura, in cui si immagina il corpo \mathcal{A} fermo, il corpo \mathcal{B} piatto e movente con velocità $-U$ pari alla velocità relativa tra i due e h lo spessore del meato che li separa, funzione della x . u , v e w sono le componenti di velocità del fluido lubrificante, a la lunghezza del meato.



Questo richiede tuttavia che siano rispettate le ipotesi di:

- influenza della curvatura: siccome h è molto minore delle altre dimensioni, trattiamo allo stesso modo meati curvi e rettilinei;
- sezione costante lungo z : lo spessore h è solo funzione di x ;
- riempimento completo del meato e incompressibilità del fluido;
- viscosità uniforme del fluido;
- moto laminare: varrà che
 - i. $v = 0$ e
 - ii. sono trascurabili tutte le derivate tranne quelle fatte sulla y (quindi $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, cioè u e w sono funzioni della sola y);
- condizioni al contorno di aderenza: varrà che

$$u(0) = -U$$

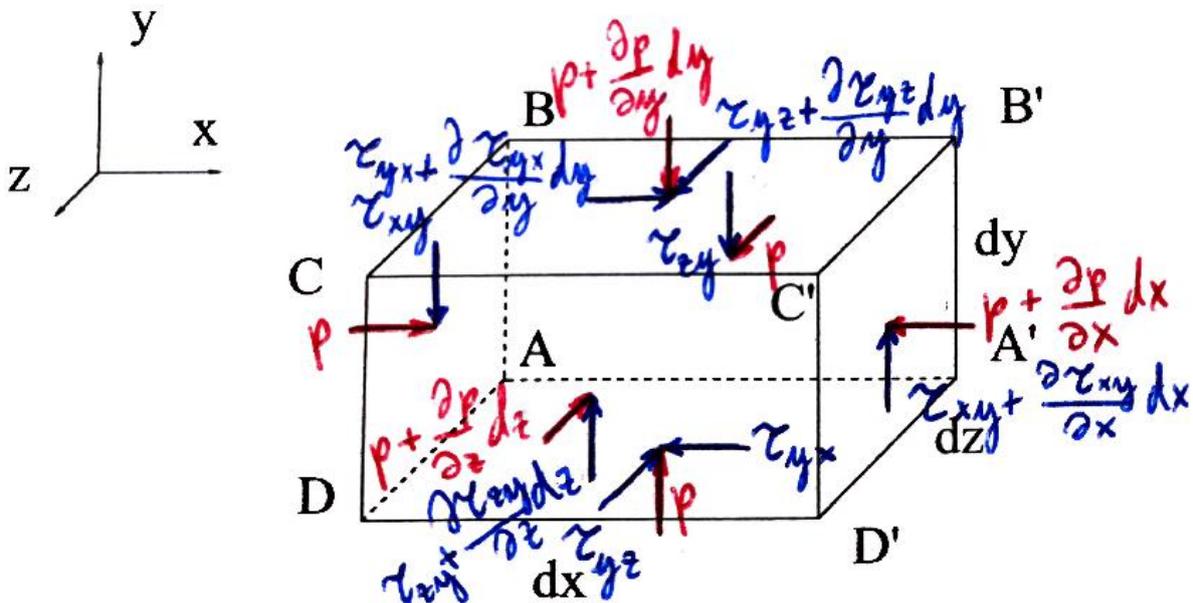
$$w(0) = u(h) = w(h) = 0$$

- newtonianità del fluido: vale la legge di Petroff

$$\tau_{I \text{ coord}, II \text{ coord}} = \mu \frac{\partial(\text{velocità secondo I coord})}{\partial(II \text{ coord})}$$

- trascurabilità delle forze esterne: si ignorano forze di massa e forze di inerzia del fluido.

Se si considera il volume infinitesimo di fluido $ABCD A' B' C' D'$ di dimensioni dx , dy e dz si possono trovare sforzi tangenziali normali (uno) e tangenziali (due) per ciascuna faccia come in figura. Accade tuttavia che – ad esempio – sulla faccia $ABCD$ dovrebbe comparire lo sforzo τ_{xz} che, per la legge di Petroff, dovrebbe valere $\mu \frac{\partial u}{\partial z}$; eppure per ipotesi $\frac{\partial u}{\partial z} \approx 0$, quindi non compare. Vuoi per l'equilibrio alla rotazione del cubetto o vuoi perché $\frac{\partial w}{\partial x} \approx 0$, anche τ_{zx} sulla faccia $AA' BB'$ è nullo. Stesso discorso si può fare per gli sforzi $\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$ sulla faccia $A' B' C' D'$ e $\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx$ sulla faccia $CC' DD'$.



L'equilibrio alla rotazione è già garantito, quindi si scrive quello delle forze:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = p \, dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz - \tau_{yx} \, dx dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz = 0 \\ \sum F_y = p \, dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} \, dy dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz + \\ \quad - \tau_{zy} \, dx dy + \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy = 0 \\ \sum F_z = p \, dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{yz} \, dx dz + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz = 0 \end{array} \right.$$

Sono trascurabili tutte le derivate che non siano lungo la y , quindi la seconda equazione diventa

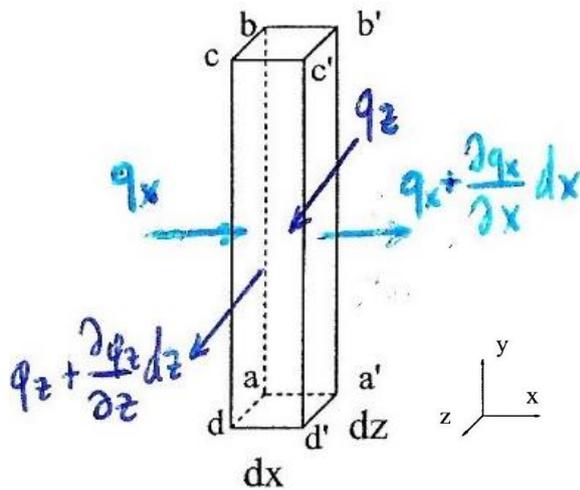
$$p \, dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dy dz + \tau_{xy} dy dz - \tau_{zy} dx dy + \tau_{zy} dx dy = 0$$

Il sistema diventa

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Siccome $\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ e $\tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}$ per la legge di Petroff

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (1) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & (2) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & (3) \end{cases}$$



È inoltre possibile enunciare l'equazione di continuità della massa per il fluido. Se si prende infatti un parallelepipedo infinitesimo di base $dx dz$ e altezza lo spessore $h(x)$ vale (per l'ipotesi di incompressibilità del fluido) che la portata in volume di ciò che entra sia uguale a quella di ciò che esce. Se $q_x = \int_0^h u \, dy$ e $q_z = \int_0^h w \, dy$ sono le portate per unità di lunghezza rispettivamente attraverso la faccia $abcd$ e $aa'bb'$ (ad esempio, se dQ_x è la portata in volume attraverso la faccia $abcd$, $q_x = \frac{dQ_x}{dz}$).

Avrò entranti le portate $q_x dz$ e $q_z dx$, mentre uscenti le portate $(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dz$ (attraverso la faccia $a'b'c'd'$)

e $(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz) dx$ (attraverso la faccia $cc'dd'$). È nulla la portata attraverso $aa'dd'$ e $bb'cc'$ perché a contatto coi solidi. Allora il bilancio delle portate è

$$q_x dz + q_z dx = \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dz + \left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) dx$$

E da qui l'equazione di continuità

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0$$

Le equazioni di bilancio delle forze, se integrate, forniscono il campo di velocità del fluido nel meato. Da (1) infatti ho

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + C_1 \quad \Rightarrow \quad u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2$$

Fisso le condizioni al contorno

$$\begin{cases} u(0) = C_2 = -U \\ u(h) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 + C_1 h + C_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_2 = -U \\ C_1 = \frac{U}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h \end{cases}$$

Pertanto

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + \left(\frac{U}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h \right) y - U = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + U \left(\frac{y}{h} - 1 \right) \quad (\diamond)$$

Allo stesso modo, da (3)

$$w(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + C_3 y + C_4$$

e con le condizioni al contorno

$$\begin{cases} w(0) = C_4 = 0 \\ w(h) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + C_3 y + C_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_4 = 0 \\ C_3 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 \end{cases}$$

Pertanto

$$w(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - hy)$$

Le portate per unità di lunghezza saranno

$$q_x = \int_0^h \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + U \left(\frac{y}{h} - 1 \right) \right] dy = -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^3 - \frac{U}{2} h$$

$$q_z = \int_0^h \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - hy) dy = -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} h^3$$

Inserendo queste grandezze nell'equazione di continuità:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^3 - \frac{U}{2} h \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} h^3 \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} h^3 \right) - \frac{U}{2} \frac{dh}{dx} - \frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} h^3 \right) &= 0 \end{aligned}$$

Da cui l'equazione di Reynolds (caso generale)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} h^3 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} h^3 \right) = -6\mu U \frac{dh}{dx}$$

che fornisce una condizione importante per la costruzione del meato: se infatti il meato fosse ad altezza costante, l'equazione diventerebbe

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$$

Essendo un'equazione di Laplace, se sul contorno del fluido assegno la pressione atmosferica – come avviene – allora l'interezza del fluido alla pressione atmosferica, per niente in grado di sostenere i carichi richiesti. Lo spessore del meato non può essere costante.

Se si trascura la fuoriuscita laterale del lubrificante per via della lunghezza longitudinale (direzione x) infinita, si può porre $w \approx 0$. Allora, per (3), si avrà $\frac{\partial p}{\partial z} \approx 0$, cioè la pressione è funzione della sola x e si potrà scrivere l'equazione di Reynolds monodimensionale:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dp}{dx} h^3 \right) = -6\mu U \frac{dh}{dx}$$

Si può facilmente integrare e ottenere

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{6\mu U}{h^2} + \frac{C_5}{h^3}$$

con C_5 costante di integrazione da fissare. Integriamo nuovamente tra l'origine delle ascisse (dove ho pressione atmosferica p_0) e l'ascissa generica (dove ho pressione $p(x)$):

$$\int_0^x \frac{dp}{d\xi} d\xi = \int_{p_0}^{p(x)} dp = p(x) - p_0 = \int_0^x \left(-\frac{6\mu U}{h^2(\xi)} + \frac{C_5}{h^3(\xi)} \right) d\xi$$

Si può imporre la condizione al contorno $p(a) = p_0$ (così come all'inizio del meato la pressione del fluido è quella atmosferica per il contatto del lubrificante con l'ambiente esterno, così lo è alla fine) e trovare C_5 :

$$0 = \int_0^x \left(-\frac{6\mu U}{h^2(\xi)} + \frac{C_5}{h^3(\xi)} \right) d\xi \Rightarrow C_5 = 6\mu U \frac{\int_0^a \frac{d\xi}{h^2(\xi)}}{\int_0^a \frac{d\xi}{h^3(\xi)}}$$

Se definisco $h^* = \frac{\int_0^a \frac{d\xi}{h^2(\xi)}}{\int_0^a \frac{d\xi}{h^3(\xi)}}$, ho che $C_5 = 6\mu U h^*$ e quindi:

- l'espressione della pressione idrodinamica è

$$p(x) = p_0 - 6\mu U \left(\int_0^x \frac{d\xi}{h^2(\xi)} - h^* \int_0^x \frac{d\xi}{h^3(\xi)} \right)$$

- l'integrale primo dell'equazione di Reynolds monodimensionale diventa

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{6\mu U}{h^2} \left(1 - \frac{h^*}{h} \right)$$

Da quest'ultima relazione ricaviamo che, se x^* è l'ascissa tale che $h(x^*) = h^*$,

$$\left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=x^*} = -\frac{6\mu U}{h^2} \left(1 - \frac{h^*}{h} \right) = 0$$

per cui $p(x^*)$ è un punto stazionario. È punto di massimo se $\left. \frac{d^2p}{dx^2} \right|_{x=x^*} < 0$, per cui prendiamo l'equazione di Reynolds monodimensionale ed esplicitiamo tale derivata seconda:

$$\frac{d^2p}{dx^2} h^3 + \frac{dp}{dx} 3h^2 \frac{dh}{dx} = -6\mu U \frac{dh}{dx} \Rightarrow \frac{d^2p}{dx^2} = -\left(\frac{dp}{dx} \frac{3}{h} + \frac{6\mu U}{h^3} \right) \frac{dh}{dx}$$

Da cui

$$\left. \frac{d^2p}{dx^2} \right|_{x=x^*} = -\left(\left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=x^*} \frac{3}{h^*} + \frac{6\mu U}{h^{*3}} \right) \left. \frac{dh}{dx} \right|_{x=x^*} = -\frac{6\mu U}{h^{*3}} \left. \frac{dh}{dx} \right|_{x=x^*}$$

Si vede che $\left. \frac{d^2p}{dx^2} \right|_{x=x^*} < 0 \Leftrightarrow \left. \frac{dh}{dx} \right|_{x=x^*} > 0$, ossia il meato deve avere spessore crescente (in particolare nella sezione x^* , ma diciamo in generale).

Quali sono le risultanti degli sforzi sul corpo B ?

Risulta evidente che

$$N = \int_A (p(x) - p_0) dA; \quad T = \int_A \tau_{yx}|_{y=0} dA$$

Se b è lo spessore del meato in direzione z e quindi l'areola è $dA = b dx$

$$N = b \int_0^a (p(x) - p_0) dx; \quad T = b \int_0^a \tau_{yx}|_{y=0} dx$$

Per conoscere N occorre conoscere la forma $h(x)$ del meato ($p(x)$ dipende da questa). Capita poi che, in genere, la sua linea d'azione sia praticamente centrata rispetto al meato con una lieve eccentricità ϵ . Per il bilancio dei momenti con polo $x = 0$:

$$\left(\frac{a}{2} - \epsilon \right) N = b \int_0^a x(p(x) - p_0) dx \Rightarrow \epsilon = \frac{a}{2} - \frac{b \int_0^a x(p(x) - p_0) dx}{N}$$

Per la legge di Petroff $\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$, ma da (\diamond) sappiamo anche che

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) + U \left(\frac{y}{h} - 1 \right)$$

quindi

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left(y - \frac{h}{2} \right) + \frac{U}{h}$$

così

$$\tau_{yx}|_{y=0} = \mu \left[\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left(y - \frac{h}{2} \right) + \frac{U}{h} \right]_{y=0} = -\frac{dp}{dx} \frac{h}{2} + \mu \frac{U}{h}$$

ma dall'integrale primo dell'equazione di Reynolds monodimensionale abbiamo l'espressione di $\frac{dp}{dx}$, pertanto

$$\tau_{yx}|_{y=0} = -\left(-\frac{6\mu U}{h^2} \left(1 - \frac{h^*}{h} \right) \right) \frac{h}{2} + \mu \frac{U}{h} = \mu U \frac{4h - 3h^*}{h^2}$$

Nota la forma del meato $h(x)$, si può calcolare T .

È inoltre possibile definire un coefficiente di attrito mediato equivalente della coppia lubrificata come

$$f_m = \frac{T}{N}$$

Esempio – Meato limitato da pareti piane

Se h_0 e h_1 sono rispettivamente gli spessori minimo e massimo del meato, la funzione è lineare:

$$h(x) = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{a}x$$

oppure, se $m = \frac{h_1 - h_0}{h_0}$,

$$h(x) = h_0 \left(1 + m \frac{x}{a}\right)$$

Allora

$$h^* = \frac{\int_0^a \frac{d\xi}{h_0^2 \left(1 + m \frac{\xi}{a}\right)^2}}{\int_0^a \frac{d\xi}{h_0^3 \left(1 + m \frac{\xi}{a}\right)^3}} = 2h_0 \frac{1+m}{2+m}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= p_0 - 6\mu U \left(\int_0^x \frac{d\xi}{h^2(\xi)} - 2h_0 \frac{1+m}{2+m} \int_0^x \frac{d\xi}{h^3(\xi)} \right) \\ &= p_0 - 6\mu U \left(\frac{ax}{h_0^2(a+mx)} - 2h_0 \frac{1+m}{2+m} \frac{ax(2a+mx)}{2h_0^3(a+mx)^2} \right) \\ &= p_0 + 6\mu U \frac{am(a-x)x}{h_0^2(2+m)(a+mx)^2} \end{aligned}$$

$$N = b \int_0^a (p(x) - p_0) dx = b \int_0^a 6\mu U \frac{am(a-x)x}{h_0^2(2+m)(a+mx)^2} dx = 6a^2 b \mu U \frac{(2+m) \ln(1+m) - 2m}{h_0^2 m^2 (2+m)}$$

$$\begin{aligned} T &= b \int_0^a \tau_{yx}|_{y=0} dx = b \int_0^a \mu U \frac{4h - 3h^*}{h^2} dx = b \int_0^a \mu U \frac{4h_0 \left(1 + m \frac{x}{a}\right) - 6h_0 \frac{1+m}{2+m}}{h_0^2 \left(1 + m \frac{x}{a}\right)^2} dx \\ &= 2ab\mu U \frac{2(2+m) \ln(1+m) - 3m}{h_0 m (2+m)} \end{aligned}$$

$$f_m = \frac{T}{N} = 3 \frac{a}{m h_0} \frac{(2+m) \ln(1+m) - 2m}{2(2+m) \ln(1+m) - 3m}$$

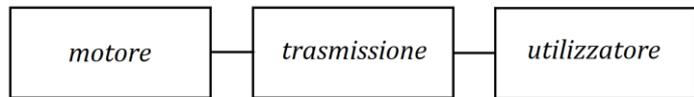
9) Modellazione dei gruppi di macchine

Si consideri un gruppo di macchine composto da un motore, una trasmissione e un utilizzatore.

Descrivere i passaggi che conducono al modello matematico e in particolare:

- le ipotesi che consentono di avere un modello con un grado di libertà con trasmissione priva d'inerzia;
- la definizione dei momenti motore e resistente ridotti ai rispettivi assi;
- la definizione di momenti d'inerzia motore e resistente ridotti ai rispettivi assi;
- le ipotesi e i limiti quando si trascura la dipendenza dei momenti e momenti d'inerzia prima definiti in funzione delle posizioni angolari dei rispettivi assi;
- esempio di calcolo del momento d'inerzia equivalente $J_m^*(\alpha_m)$, con α_m la posizione dell'albero motore, ridotto all'asse dell'albero di un motore monocilindrico a combustione interna;
- il modello fisico del gruppo di macchine;
- le possibili condizioni di moto, in particolare
 - il regime assoluto e le condizioni necessarie affinché possa instaurarsi,
 - il moto vario e le situazioni in cui riveste maggior interesse,
 - il moto periodico.

Se si schematizza un gruppo di macchine a un grado di libertà tramite col modello motore-trasmissione-utilizzatore, il problema



dinamico può essere risolto mediante un bilancio delle potenze $\sum W = \frac{dE_{tot}^c}{dt}$ sul volume di controllo che comprende l'intero gruppo. Avremmo quindi, in teoria,

$$W^m + W^t + W^u = \frac{d}{dt} [E_m^c + E_t^c + E_u^c]$$

ossia al membro di sinistra la somma di tutte le potenze distinta tra tutte quelle che competono al motore, alla trasmissione e all'utilizzatore, mentre a destra sono state distinte le somme che competono a ciascuna di queste sopracitate macchine.

In quanto spesso di poca influenza e in quanto, comunque sia, posso sempre attribuirle a motore o utilizzatore, siamo soliti trascurare per semplicità di calcolo la somma E_t^c delle energie cinetiche della trasmissione. Allora:

$$W^m + W^t + W^u = \frac{d}{dt} [E_m^c + E_u^c]$$

Si è soliti, per semplificare la modellizzazione, trattare le macchine motrice e utilizzatrice come dei volani in rotazione su un albero e su cui agisce un momento.

Occorre dunque equiparare tutte le forze agenti dal lato motore a un unico momento ridotto M_m^* che agisce sulla rotazione ω_m di un albero e trasmette così potenza all'esterno del lato motore. Stiamo cioè introducendo un M_m^* tale che

$$W^m = M_m^* \omega_m$$

Allo stesso modo si può fare dal lato utilizzatore, introducendo un momento ridotto M_u^* rappresentativo di tutte le forze resistenti considerato agente su una rotazione ω_u , quindi tale che

$$W^u = M_u^* \omega_u$$

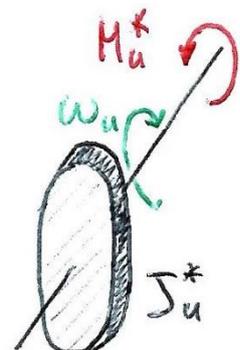
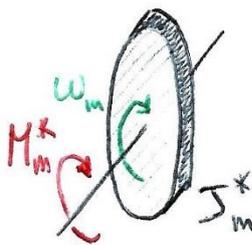
La modellizzazione del volano si fa invece ambasciatrice di tutte le inerzie della macchina (anche quelle non rotazionali), cioè dal lato motore avrà un momento d'inerzia ridotto J_m^* tale che

$$E_m^c = \frac{1}{2} J_m^* \omega_m^2$$

mentre da quello utilizzatore un momento d'inerzia ridotto J_u^* tale che

$$E_u^c = \frac{1}{2} J_u^* \omega_u^2$$

Il momento ridotto motore (risp. utilizzatore) è in generale funzione della posizione angolare α_m (risp. α_u) e della velocità angolare $\omega_m = \dot{\alpha}_m$ (risp. $\omega_u = \dot{\alpha}_u$) dell'albero, mentre i momenti d'inerzia ridotti dipendono in generale dalla posizione angolare α_m o α_u e questo sarebbe il modello completo che occorre studiare per conoscere fenomeni di amplificazione dinamica e vibrazioni.



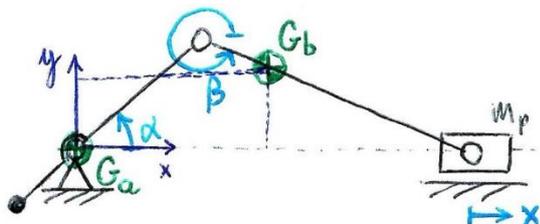
Se ai fini dell'indagine tali aspetti non interessano (sono trascurabili o non notevoli per il livello di analisi), si può considerare un modello semplificato in cui né momento ridotto né momento d'inerzia ridotto dipendono dalla posizione angolare α_m o α_u . Utilizziamo quindi dei valori medi sul periodo (che è Γ o Θ per i momenti e 2π per i momenti d'inerzia):

$$M_m^*(\omega_m) = \frac{1}{\Gamma} \int_0^\Gamma M_m^*(\alpha_m, \omega_m = \text{cost}) d\alpha_m$$

$$M_u^*(\omega_u) = \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta M_u^*(\alpha_u, \omega_u = \text{cost}) d\alpha_u$$

$$J_m^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_m^*(\alpha_m) d\alpha_m = \text{cost}$$

$$J_u^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_u^*(\alpha_u) d\alpha_u = \text{cost}$$



Si riporta l'esempio di calcolo del momento d'inerzia $J_m^*(\alpha)$ ridotto all'asse dell'albero di un motore monocilindrico a combustione interna.

L'energia cinetica totale del sistema è

$$E_m^c = \frac{1}{2} J_a^G \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} J_b^G \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_b v_{G_b}^2 + \frac{1}{2} m_p \dot{x}^2$$

Dalla cinematica si avrà poi che, essendo il sistema a 1 GdL, tutto può essere relazionato ad α :

$$\dot{\beta} = \Lambda_\beta(\alpha) \dot{\alpha}$$

$$\dot{x} = \Lambda_x(\alpha) \dot{\alpha}$$

$$\dot{x}_{G_b} = \Lambda_{x_{G_b}}(\alpha) \dot{\alpha}$$

$$\dot{y}_{G_b} = \Lambda_{y_{G_b}}(\alpha) \dot{\alpha}$$

$$(\text{dove } v_{G_b}^2 = \dot{x}_{G_b}^2 + \dot{y}_{G_b}^2).$$

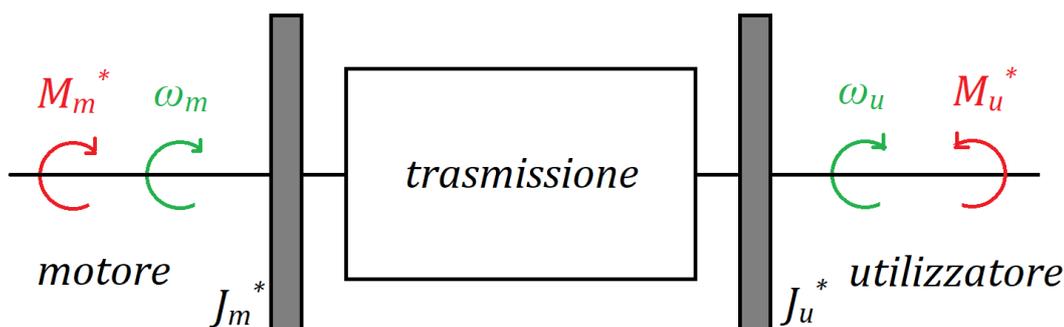
Dunque

$$E_m^c = \frac{1}{2} \left[J_a^G + J_b^G \Lambda_\beta^2(\alpha) + m_b \left(\Lambda_{x_{G_b}}^2(\alpha) + \Lambda_{y_{G_b}}^2(\alpha) \right) + m_p \Lambda_x^2(\alpha) \right] \dot{\alpha}^2$$

e allora, dal confronto con la definizione di momento d'inerzia ridotto si ottiene

$$J_m^*(\alpha) = J_a^G + J_b^G \Lambda_\beta^2(\alpha) + m_b \left(\Lambda_{x_{G_b}}^2(\alpha) + \Lambda_{y_{G_b}}^2(\alpha) \right) + m_p \Lambda_x^2(\alpha)$$

Il modello fisico del gruppo di macchine è pertanto:



Si hanno tre possibili condizioni di moto della macchina:

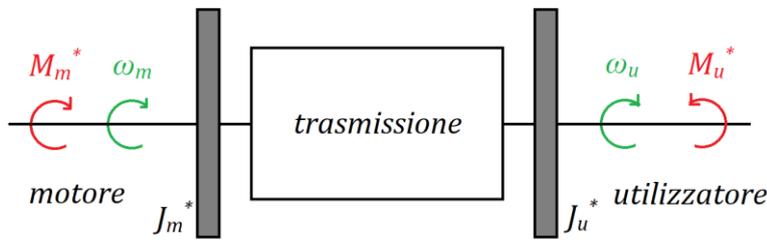
- il regime assoluto, quando $\frac{dE_{tot}^c}{dt} = 0$; si può avere solo quando si considerano i momenti ridotti dipendenti dalla sola velocità angolare e i momenti d'inerzia ridotti costanti;
- il regime vario periodico, quando $\frac{dE_{tot}^c}{dt} \neq 0$ ma E_{tot}^c varia periodicamente; è l'equivalente del regime assoluto di funzionamento per sistemi a cui si applica il modello completo, cioè dove non si trascura la dipendenza di momenti e momenti d'inerzia ridotti dalla posizione angolare dell'albero;
- il regime vario (transitorio), quando $\frac{dE_{tot}^c}{dt} \neq 0$ ma E_{tot}^c non varia secondo alcuna legge periodica; saranno a regime vario i transitori di accelerazione o decelerazione del gruppo di macchine (vedi un avviamento o uno spegnimento di un turbogruppo a gas, piuttosto che un veicolo in accelerazione o in frenata, etc...)

10) Modellazione del motore e dell'utilizzatore

Si consideri un gruppo di macchine composto da un motore, una trasmissione e un utilizzatore.

Spiegare come modellare un motore con un momento motore M_m^* e un momento d'inerzia J_m^* equivalenti ridotti all'albero motore che ruota con velocità ω_m e analogamente un utilizzatore con M_u^* , J_u^* e ω_u ; inoltre specificamente descrivere la modellazione

- di $M_m^*(\omega_m)$ e J_m^* per un motore in corrente continua;
- di $M_m^*(\omega_m)$, in funzione del grado di ammissione, e $J_m^*(\alpha_m)$, con α_m la posizione dell'albero motore, per un motore monocilindrico a 4 tempi;
- di $M_m^*(\omega_m)$ e J_m^* per un motore asincrono trifase, sia alimentato direttamente dalla rete sia pilotato con un inverter;
- di utilizzatori, indicando possibili casi pratici, con coppia resistente $M_u^*(\omega_u)$
 - costante,
 - quadratica con valore da fermo nullo e
 - quadratica con valore da fermo diverso da zero.



Si è soliti modellare le macchine motrice e utilizzatrice come dei volani in rotazione su un albero e su cui agisce un momento.

Occorre dunque equiparare tutte le forze agenti dal lato motore a un unico momento ridotto M_m^* che agisce sulla

rotazione ω_m di un albero e trasmette così potenza all'esterno del lato motore.

Stiamo cioè introducendo un M_m^* tale che

$$W^m = M_m^* \omega_m$$

Allo stesso modo si può fare dal lato utilizzatore, introducendo un momento ridotto M_u^* rappresentativo di tutte le forze resistenti considerato agente su una rotazione ω_u , quindi tale che

$$W^u = M_u^* \omega_u$$

La modellizzazione del volano si fa invece ambasciatrice di tutte le inerzie della macchina (anche quelle non rotazionali), cioè dal lato motore avrò un momento d'inerzia ridotto J_m^* tale che

$$E_m^c = \frac{1}{2} J_m^* \omega_m^2$$

mentre da quello utilizzatore un momento d'inerzia ridotto J_u^* tale che

$$E_u^c = \frac{1}{2} J_u^* \omega_u^2$$

Il momento ridotto motore (risp. utilizzatore) è in generale funzione della posizione α_m (risp. α_u) e della velocità angolare $\omega_m = \dot{\alpha}_m$ (risp. $\omega_u = \dot{\alpha}_u$) dell'albero, mentre i momenti d'inerzia dipendono in generale dalla posizione α_m o α_u e questo sarebbe il modello completo che occorre studiare per conoscere fenomeni di amplificazione dinamica e vibrazioni.

Se ai fini dell'indagine tali aspetti non interessano (sono trascurabili o non notevoli per il livello di analisi), si può considerare un modello semplificato in cui né momento ridotto né momento d'inerzia ridotto dipendono dalla posizione α_m o α_u . Utilizziamo quindi dei valori medi sul periodo (che è Γ o Θ per i momenti e 2π per i momenti d'inerzia):

$$M_m^*(\omega_m) = \frac{1}{\Gamma} \int_0^\Gamma M_m^*(\alpha_m, \omega_m = \text{cost}) d\alpha_m$$

$$M_u^*(\omega_u) = \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta M_u^*(\alpha_u, \omega_u = \text{cost}) d\alpha_u$$

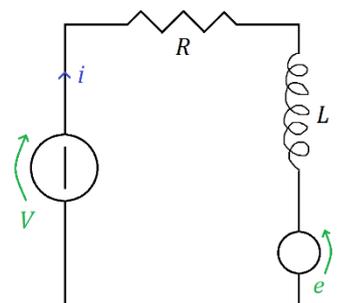
$$J_m^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_m^*(\alpha_m) d\alpha_m = \text{cost}$$

$$J_u^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_u^*(\alpha_u) d\alpha_u = \text{cost}$$

Un motore in corrente continua ha in genere dei magneti permanenti a creare il flusso statorico e degli avvolgimenti rotorici che, attraversati da corrente, costituiscono l'indotto e da cui scaturisce la coppia responsabile del movimento.

Il circuito rotorico è modellabile come in figura, per cui si può scrivere la LKT:

$$V = Ri + e + L \frac{di}{dt}$$



L è trascurabile, mentre e rappresenta la forza controelettromotrice, alter-ego per l'energia elettrica che si trasforma in meccanica, la cui relazione costitutiva è

$$e = k_e \omega_m$$

ossia la tensione che compare nell'avvolgimento rotorico è direttamente proporzionale alla velocità angolare dell'albero. Il momento che si sviluppa risulta invece direttamente proporzionale alla corrente che attraversa l'avvolgimento:

$$M_m = k_m i$$

Queste tre equazioni forniscono la caratteristica meccanica del motore; infatti, inserendo le ultime due nella prima:

$$V = R \frac{M_m}{k_m} + k_e \omega_m$$

Se si considera che – salvo perdite – dev'essere $W^{mecc} = W^{elettr}$ (la potenza meccanica ottenuta è uguale quella spesa nell'induzione rotorica), varrà

$$M_m \omega_m = ei \Rightarrow k_m i \omega_m = k_e \omega_m i \Rightarrow k_m = k_e = k$$

Così, la curva caratteristica è

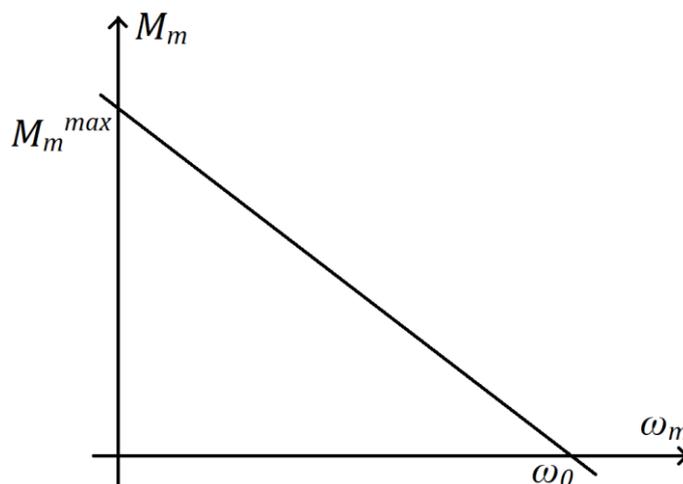
$$M_m(\omega_m) = \frac{kV}{R} \left(1 - \frac{\omega_m}{V/k}\right)$$

cioè, se $M_m^{max} = \frac{kV}{R}$ e $\omega_0 = V/k$,

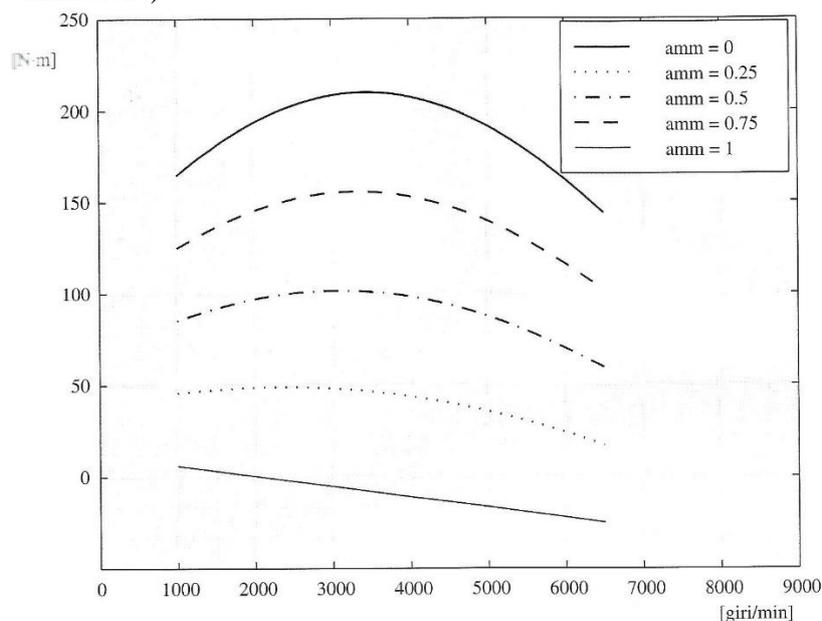
$$M_m(\omega_m) = M_m^{max} \left(1 - \frac{\omega_m}{\omega_0}\right)$$

N.B. La legge è lineare nella ω_m . Possiamo considerare V come parametro di controllo poiché è aumentando o diminuendo la tensione all'avvolgimento che modifichiamo nella pratica le prestazioni del motore.

Essendo il motore già nella realtà costituito da un albero e un volano, cioè esattamente come vogliamo modellizzarlo, $M_m(\omega_m)$ coinciderà col momento ridotto $M_m^*(\omega_m)$ e il momento di inerzia rispetto all'asse del rotore sarà proprio J_m^* .



Per un motore monocilindrico a 4 tempi abbiamo invece la curva caratteristica (in funzione del grado di ammissione):



Si può scrivere una relazione analitica del momento ridotto:

$$M_m^*(\omega_m) = M_m^{min}(\omega_m) + \gamma [M_m^{max}(\omega_m) - M_m^{min}(\omega_m)]$$

Calcoliamo il momento d'inerzia $J_m^*(\alpha)$ ridotto all'asse dell'albero di un motore monocilindrico a 4 tempi.

L'energia cinetica totale del sistema è

$$E_m^c = \frac{1}{2} J_a^G \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} J_b^G \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m_b v_{G_b}^2 + \frac{1}{2} m_p \dot{x}^2$$

Dalla cinematica si avrà poi che, essendo il sistema a 1 GdL, tutto può essere relazionato ad α :

$$\dot{\beta} = \Lambda_\beta(\alpha) \dot{\alpha}$$

$$\dot{x} = \Lambda_x(\alpha) \dot{\alpha}$$

$$\dot{x}_{G_b} = \Lambda_{x_{G_b}}(\alpha) \dot{\alpha}$$

$$\dot{y}_{G_b} = \Lambda_{y_{G_b}}(\alpha) \dot{\alpha}$$

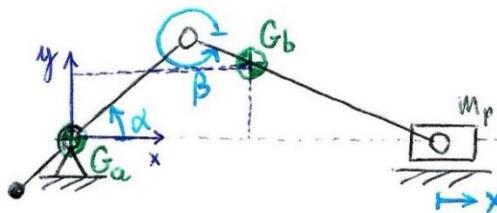
$$(\text{dove } v_{G_b}^2 = \dot{x}_{G_b}^2 + \dot{y}_{G_b}^2).$$

Dunque

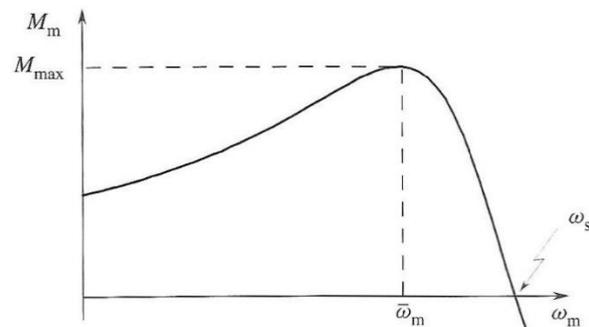
$$E_m^c = \frac{1}{2} \left[J_a^G + J_b^G \Lambda_\beta^2(\alpha) + m_b \left(\Lambda_{x_{G_b}}^2(\alpha) + \Lambda_{y_{G_b}}^2(\alpha) \right) + m_p \Lambda_x^2(\alpha) \right] \dot{\alpha}^2$$

e allora, dal confronto con la definizione di momento d'inerzia ridotto si ottiene

$$J_m^*(\alpha) = J_a^G + J_b^G \Lambda_\beta^2(\alpha) + m_b \left(\Lambda_{x_{G_b}}^2(\alpha) + \Lambda_{y_{G_b}}^2(\alpha) \right) + m_p \Lambda_x^2(\alpha)$$



Per un motore asincrono trifase abbiamo una curva caratteristica:

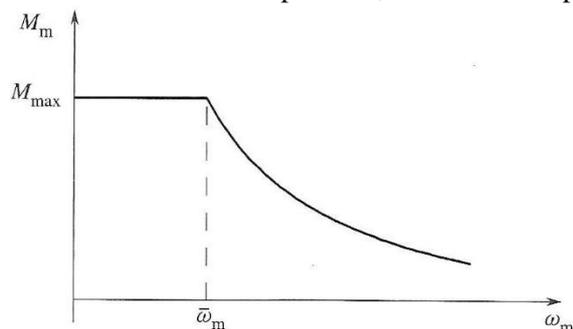


Si nota un massimo di M_m^* in corrispondenza di $\bar{\omega}_m$ e l'annullamento della coppia se la velocità del rotore raggiunge quella di sincronismo, ossia la stessa con cui ruota il campo magnetico statorico, pari a $\omega_s = \frac{2\pi f}{p}$ (f è la frequenza di rete e p il numero di coppie polari statoriche). Si può anche esprimere ω_m in relazione a quanto si discosta da ω_s tramite lo scorrimento $s = \frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s}$.

Semplici considerazioni portano a considerare il tratto di curva prima di $\bar{\omega}_m$ come instabile (infatti, dovesse aumentare il momento resistente, ciò porterebbe a una diminuzione della velocità rotorica, alla quale corrisponderebbe una diminuzione del momento motore con conseguente diminuzione della velocità e così via fino all'arresto), mentre quello successivo come stabile (per la motivazione opposta). È qui infatti (per valori di scorrimento di 2÷3%) che si fa lavorare il motore. In questo tratto, tra l'altro, la curva molto ripida è ben approssimata da una retta di equazione

$$M_m^*(\omega_m) = M_{max} \left(1 - \frac{\omega_m}{\omega_s} \right)$$

Tuttavia in genere un motore asincrono trifase è pilotato da un inverter che, fornitagli corrente trasformata in continua rispetto alla alternata di rete, alimenta il motore con una corrente trifase i cui voltaggio e frequenza sono parametri di controllo. A ogni combinazione di questi parametri si ha una curva caratteristica diversa e pertanto, modulandoli opportunamente, si può arrivare a una curva caratteristica:



Essendo il motore già nella realtà costituito da un albero e un volano, cioè esattamente come vogliamo modellizzarlo, $M_m(\omega_m)$ coinciderà col momento ridotto $M_m^*(\omega_m)$ e il momento di inerzia rispetto all'asse del rotore sarà proprio J_m^* .

Un utilizzatore con coppia resistente costante avrà

$$M_u^*(\omega_u) = -M_r = \text{cost}$$

ed è questa la modellizzazione, ad esempio, del sollevamento di un carico, ossia generante una coppia indipendente dalla velocità angolare ω_u .

Un utilizzatore con coppia resistente quadratica avrà

$$M_u^*(\omega_u) = -k\omega_m^2$$

ed è questa la modellizzazione per una resistenza di tipo fluidodinamico (si veda l'esempio di una pompa di ricircolo deputata a vincere le perdite di carico in un circuito idraulico, ma senza fornire una prevalenza).

Un terzo caso comprende la sovrapposizione dei primi due:

$$M_u^*(\omega_u) = -M_r - k\omega_m^2$$

Si usa tale modello per rappresentare ad esempio una pompa idraulica che, oltre a vincere le perdite di carico (quadratiche), debba anche fornire una prevalenza (resistenza costante) oppure un'automobile che debba vincere sia resistenza a rotolamento (costante) che fenomeni aerodinamici (quadratici).

11) Modelli cinematico e dinamico delle trasmissioni

Si consideri un gruppo di macchine composto da un motore e un utilizzatore, collegati da una trasmissione:

- descrivere i compiti di una trasmissione, gli effetti cinematici e dinamici e i comportamenti desiderati;
- definire il moto diretto e il moto retrogrado;
- calcolare la potenza che attraversa una trasmissione, specificando
 - i metodi per determinare se il moto è diretto o retrogrado e
 - le differenze tra casi di analisi dinamica diretta o inversa;
- esprimere la potenza persa nella trasmissione nel moto diretto e retrogrado;
- descrivere gli effetti cinematici e dinamici di più trasmissioni in serie.

Compito di una trasmissione è quello di trasmettere la potenza tra due macchine all'interno del gruppo. Potrebbe essere deputata a cambiare le condizioni in cui viene fornita alla macchina a valle (quindi modificarne i valori di coppia e velocità angolare) o semplicemente ad assicurarsi che questa fluisca tra due macchine poste a una certa distanza.

Nel primo caso descriviamo l'effetto cinematico del cambio di velocità angolare tramite il rapporto di trasmissione

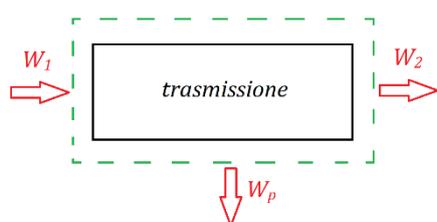
$$\tau = \frac{\omega_u}{\omega_m}$$

Varrà dunque che $\omega_u = \tau\omega_m$ e, nel caso di trasmissioni omocinetiche ($\tau = \text{cost}$), che $\dot{\omega}_u = \tau\dot{\omega}_m$.

La trasmissione ha poi l'unico effetto dinamico (se si trascura la sua energia cinetica) di dissipare una certa quantità di potenza W_p (a causa di attriti, deformazioni, etc...).

La potenza in una trasmissione può fluire:

- dal lato motore al lato utilizzatore quando la condizione è di moto diretto
- dal lato utilizzatore al lato motore quando la condizione è di moto retrogrado



Tramite l'introduzione di rendimenti, saremo in grado di stabilire il valore di W_p in funzione della potenza entrante/uscente dal lato motore/utilizzatore.

Si scrive innanzitutto il bilancio delle potenze su un volume di controllo contenente la trasmissione:

$$W_1 + W_2 + W_p = 0$$

In caso di moto diretto:

$W_1 > 0$ perché entrante, mentre $W_2 < 0$ perché uscente. Definiamo il rendimento diretto

$$\eta_d = -\frac{W_2}{W_1}$$

e allora

$$W_p = -(W_1 + W_2) = -(W_1 - \eta_d W_1) = -(1 - \eta_d)W_1$$

oppure

$$W_p = -(W_1 + W_2) = -\left(-\frac{W_2}{\eta_d} + W_2\right) = -\left(1 - \frac{1}{\eta_d}\right)W_2$$

In caso di moto retrogrado:

$W_1 < 0$ perché uscente, mentre $W_2 > 0$ perché entrante. Definiamo il rendimento retrogrado

$$\eta_r = -\frac{W_1}{W_2}$$

e allora

$$W_p = -(W_1 + W_2) = -(-\eta_r W_2 + W_2) = -(1 - \eta_r)W_2$$

oppure

$$W_p = -(W_1 + W_2) = -\left(W_1 - \frac{W_1}{\eta_r}\right) = -\left(1 - \frac{1}{\eta_r}\right)W_1$$

La determinazione della direzione del flusso di potenza sta tutta nel segno di W_1 o W_2 .

Si può scrivere il bilancio delle potenze su un volume di controllo contenente il motore:

$$W_m + W_1^m = \frac{dE_m^c}{dt} \Rightarrow M_m^* \omega_m + W_1^m = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J_m^* \omega_m^2 \right] \Rightarrow W_1^m = -(M_m^* - J_m^* \dot{\omega}_m) \omega_m$$

Oppure su uno contenente l'utilizzatore:

$$W_u + W_2^u = \frac{dE_u^c}{dt} \Rightarrow M_u^* \omega_u + W_2^u = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J_u^* \omega_u^2 \right] \Rightarrow W_2^u = -(M_u^* - J_u^* \dot{\omega}_u) \omega_u$$

La potenza W_1^m uscente dal/entrante nel motore – dato che non ci sono perdite – è opposta a quella W_1 entrante nella/uscente dalla trasmissione e la potenza W_2^u uscente dall'/entrante nell'utilizzatore – dato che non ci sono perdite – è opposta a quella W_2 entrante nella/uscente dalla trasmissione. Allora:

		$W_p = f(W_1)$	$W_p = f(W_2)$
<u>M. diretto</u>	$W_1 = (M_m^* - J_m^* \dot{\omega}_m) \omega_m > 0$ oppure $W_2 = (M_u^* - J_u^* \dot{\omega}_u) \omega_u < 0$	$-(1 - \eta_d)(M_m^* - J_m^* \dot{\omega}_m) \omega_m$	$-\left(1 - \frac{1}{\eta_d}\right)(M_u^* - J_u^* \dot{\omega}_u) \omega_u$
<u>M. retrogrado</u>	$W_1 = (M_m^* - J_m^* \dot{\omega}_m) \omega_m < 0$ oppure $W_2 = (M_u^* - J_u^* \dot{\omega}_u) \omega_u > 0$	$-\left(1 - \frac{1}{\eta_r}\right)(M_m^* - J_m^* \dot{\omega}_m) \omega_m$	$-(1 - \eta_r)(M_u^* - J_u^* \dot{\omega}_u) \omega_u$

Se si considerano per convenzione le velocità degli alberi motore e utilizzatore come positive, la determinazione del moto tramite il segno di W_1 (risp. W_2) passa per la determinazione del segno del binomio $M_m^* - J_m^* \dot{\omega}_m$ (risp. $M_u^* - J_u^* \dot{\omega}_u$) che contiene un momento positivo o negativo a seconda che sia concorde o no con la rotazione e un dato cinematico, cioè l'accelerazione angolare dell'albero. Se già si conosce la cinematica del sistema (analisi inversa), si conosce anche questa accelerazione ed è immediato stabilire il segno del suddetto binomio. Se la cinematica è incognita (analisi diretta), si dovrà ipotizzare una condizione di moto diretto o retrogrado e verificare la congruenza dell'ipotesi fatta controllando a calcoli svolti il segno del binomio.

Capita spesso che due trasmissioni siano poste in serie.

Dal punto di vista cinematico, dati i rapporti di trasmissione τ_1 e τ_2 , si dimostra che

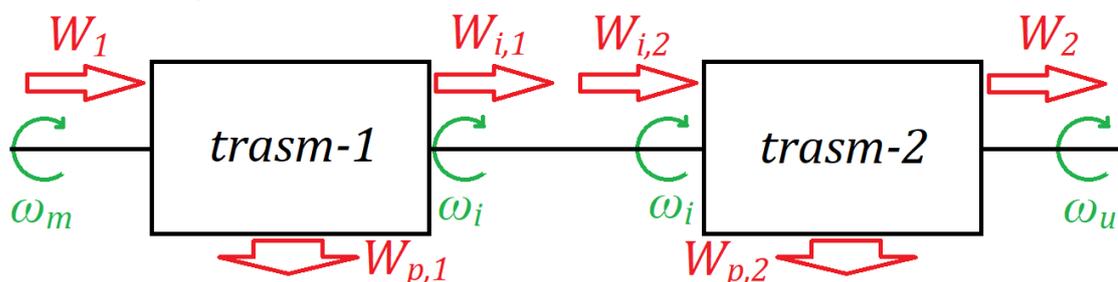
$$\omega_u = \tau_1 \tau_2 \omega_m$$

(infatti vale che $\tau_1 = \frac{\omega_i}{\omega_m}$ e $\tau_2 = \frac{\omega_u}{\omega_i}$ e il risultato è banale).

Dal punto di vista dinamico invece, accertatisi che tra le due trasmissioni non ci siano riserve di energia cinetica e non sia aggiunta o sottratta potenza, si dimostra che

$$W_2 = \eta_1 \eta_2 W_1$$

(infatti vale che $\eta_1 = \frac{W_{i,1}}{W_1}$ ed $\eta_2 = \frac{W_2}{W_{i,2}}$; se sono accettabili le ipotesi fatte e quindi $W_{i,1} = W_{i,2}$, si arriva banalmente al risultato).



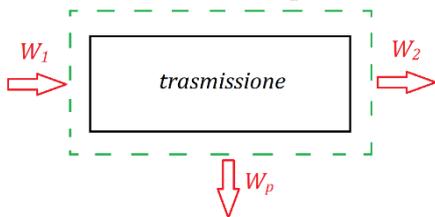
12) Dinamica di un gruppo di macchine

Si consideri un gruppo di macchine con un grado di libertà composto da un motore, una trasmissione, considerata priva d'inerzia e con rendimento η e rapporto di trasmissione τ , e un utilizzatore. Essendo descritto con un modello con momenti d'inerzia e momenti motore e resistente ridotti non dipendenti dalla posizione degli alberi, esprimere:

- la potenza entrante e la potenza persa nella trasmissione, in condizioni di moto diretto e retrogrado;
- in funzione del moto del motore, il modello dinamico completo per il gruppo di macchine in moto diretto e retrogrado e, nel caso particolare di regime assoluto, le equazioni che si ottengono per la trasmissione e l'intero gruppo; esplicitare l'accelerazione e interpretare il modello;
- un esempio di analisi del transitorio di avviamento di un gruppo in cui il motore ha la caratteristica meccanica di un motore in corrente continua e l'utilizzatore ha una resistenza costante.

La potenza in una trasmissione può entrare:

- dal lato motore quando la condizione è di moto diretto
- dal lato utilizzatore quando la condizione è di moto retrogrado



Tramite l'introduzione di rendimenti, saremo in grado di stabilire il valore di W_p potenza persa in funzione della potenza entrante dal lato motore o utilizzatore.

Si scrive innanzitutto il bilancio delle potenze su un volume di controllo contenente la trasmissione:

$$W_1 + W_2 + W_p = 0$$

In caso di moto diretto:

$W_1 > 0$ perché entrante, mentre $W_2 < 0$ perché uscente. Definiamo il rendimento diretto

$$\eta_d = -\frac{W_2}{W_1}$$

e allora

$$W_p = -(W_1 + W_2) = -(W_1 - \eta_d W_1) = -(1 - \eta_d)W_1$$

oppure

$$W_p = -(W_1 + W_2) = -\left(-\frac{W_2}{\eta_d} + W_2\right) = -\left(1 - \frac{1}{\eta_d}\right)W_2$$

In caso di moto retrogrado:

$W_1 < 0$ perché uscente, mentre $W_2 > 0$ perché entrante. Definiamo il rendimento retrogrado

$$\eta_r = -\frac{W_1}{W_2}$$

e allora

$$W_p = -(W_1 + W_2) = -(-\eta_r W_2 + W_2) = -(1 - \eta_r)W_2$$

oppure

$$W_p = -(W_1 + W_2) = -\left(W_1 - \frac{W_1}{\eta_r}\right) = -\left(1 - \frac{1}{\eta_r}\right)W_1$$

La determinazione della direzione del flusso di potenza sta tutta nel segno di W_1 o W_2 , che sono positivi se entranti.

Si può scrivere il bilancio delle potenze su un volume di controllo contenente il motore nel caso di moto diretto, dove la potenza W_1^m uscente dal motore è opposta a quella W_1 entrante nella trasmissione:

$$W_m + W_1^m = \frac{dE_m^c}{dt} \Rightarrow M_m^* \omega_m + W_1^m = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J_m^* \omega_m \right] \Rightarrow W_1^m = -(M_m^* - J_m^* \dot{\omega}_m) \omega_m$$

Così la potenza entrante nella trasmissione è

$$W_1 = (M_m^* - J_m^* \dot{\omega}_m) \omega_m$$

Oppure su uno contenente l'utilizzatore nel caso di moto retrogrado, dove la potenza W_2^u uscente dall'entrante nell'utilizzatore – dato che non ci sono perdite – è opposta a quella W_2 entrante nella/uscente dalla trasmissione:

$$W_u + W_2^u = \frac{dE_u^c}{dt} \Rightarrow M_u^* \omega_u + W_2^u = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J_u^* \omega_u \right] \Rightarrow W_2^u = -(M_u^* - J_u^* \dot{\omega}_u) \omega_u$$

Così la potenza entrante nella trasmissione è

$$W_2 = (M_u^* - J_u^* \dot{\omega}_u) \omega_u$$

Allora:

		$W_p = f(W_1)$	$W_p = f(W_2)$
<u>M. diretto</u>	$W_1 = (M_m^* - J_m^* \dot{\omega}_m) \omega_m > 0$ oppure $W_2 = (M_u^* - J_u^* \dot{\omega}_u) \omega_u < 0$	$-(1 - \eta_d)(M_m^* - J_m^* \dot{\omega}_m) \omega_m$	$-\left(1 - \frac{1}{\eta_d}\right)(M_u^* - J_u^* \dot{\omega}_u) \omega_u$
<u>M. retrogrado</u>	$W_1 = (M_m^* - J_m^* \dot{\omega}_m) \omega_m < 0$ oppure $W_2 = (M_u^* - J_u^* \dot{\omega}_u) \omega_u > 0$	$-\left(1 - \frac{1}{\eta_r}\right)(M_m^* - J_m^* \dot{\omega}_m) \omega_m$	$-(1 - \eta_r)(M_u^* - J_u^* \dot{\omega}_u) \omega_u$

Il modello dinamico completo per il gruppo di macchine si ottiene facendo il bilancio delle potenze sul volume di controllo:

$$W^m + W^t + W^u = \frac{d}{dt} [E_m^c + E_u^c]$$

Nel caso di moto diretto:

$$\begin{aligned} M_m^* \omega_m - (1 - \eta_d)(M_m^* - J_m^* \dot{\omega}_m) \omega_m + M_u^* \omega_u &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J_m^* \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_u^* \omega_u^2 \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow M_m^* \omega_m - M_m^* \omega_m + J_m^* \omega_m \dot{\omega}_m + \eta_d M_m^* \omega_m - \eta_d J_m^* \omega_m \dot{\omega}_m + M_u^* \omega_u &= J_m^* \omega_m \dot{\omega}_m + J_u^* \omega_u \dot{\omega}_u \Rightarrow \\ \Rightarrow \eta_d M_m^* \omega_m + M_u^* \omega_u &= \eta_d J_m^* \omega_m \dot{\omega}_m + J_u^* \omega_u \dot{\omega}_u \end{aligned}$$

Considerando che $\omega_u = \tau \omega_m$ e $\dot{\omega}_u = \tau \dot{\omega}_m$,

$$\begin{aligned} \eta_d M_m^* \omega_m + \tau M_u^* \omega_m &= \eta_d J_m^* \omega_m \dot{\omega}_m + \tau^2 J_u^* \omega_m \dot{\omega}_m \Rightarrow \\ \Rightarrow \eta_d M_m^* + \tau M_u^* &= \eta_d J_m^* \dot{\omega}_m + \tau^2 J_u^* \dot{\omega}_m \end{aligned}$$

e infine, esplicitando l'accelerazione

$$\dot{\omega}_m = \frac{\eta_d M_m^* + \tau M_u^*}{\eta_d J_m^* + \tau^2 J_u^*}$$

Si possono fare diverse considerazioni:

- il rendimento di trasmissione rende meno efficace ai fini dell'accelerazione il momento motore
- il rapporto di trasmissione, in genere minore di uno, abbassa l'influenza del momento resistente: è qui che si manifesta l'incremento di coppia in uscita voluto dal riduttore
- il rapporto di trasmissione, quadratico davanti all'inerzia dell'utilizzatore, la rende sostanzialmente trascurabile: capiterà che potrà addirittura avere più importanza l'inerzia lato motore

Nel caso di moto retrogrado, attraverso analoghi passaggi (l'unica modifica è che va posta

$$W^t = W_p = -\left(1 - \frac{1}{\eta_r}\right)(M_m^* - J_m^* \dot{\omega}_m) \omega_m):$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{M_m^* + \eta_r \tau M_u^*}{J_m^* + \eta_r \tau^2 J_u^*}$$

A proposito di quest'equazione si possono fare considerazioni analoghe a quella per il moto diretto.

Se ci trovassimo in condizioni di regime assoluto, allora $\frac{dE_{tot}^c}{dt} = 0$ e quindi $\dot{\omega}_m = 0$.

Da quest'ultima condizione si ricavano le equazioni che governano la potenza persa in trasmissione:

Moto diretto	Moto retrogrado
$W_p = -(1 - \eta_d) M_m^* \omega_m$	$W_p = -\left(1 - \frac{1}{\eta_r}\right) M_m^* \omega_m$

Da queste ultime o semplicemente sempre dall'annullamento di $\dot{\omega}_m$ si ha poi l'equazione del moto:

Moto diretto	Moto retrogrado
$\eta_d M_m^* + \tau M_u^* = 0$	$M_m^* + \eta_r \tau M_u^* = 0$

Nel caso di un motore in corrente continua – cioè $M_m^*(\omega_m) = M_m^{max} \left(1 - \frac{\omega_m}{\omega_0}\right)$ – e utilizzatore a resistenza costante – ossia $M_u^* = -M_r$ – se si studia un transitorio d'avviamento occorrerà utilizzare l'equazione del moto diretto; pertanto:

$$\dot{\omega}_m = \frac{\eta_d M_m^{max} \left(1 - \frac{\omega_m}{\omega_0}\right) - \tau M_r}{\eta_d J_m^* + \tau^2 J_u^*}$$

Quest'equazione differenziale si risolve in maniera più comoda se scritta

$$\dot{\omega}_m + \frac{\eta_d M_m^{max}}{\omega_0 (\eta_d J_m^* + \tau^2 J_u^*)} \omega_m = \frac{\eta_d M_m^{max} - \tau M_r}{\eta_d J_m^* + \tau^2 J_u^*}$$

ossia nella forma

$$\dot{\omega}_m + A\omega_m = B$$

L'integrale generale dell'equazione è somma di una soluzione particolare $\omega_{m,p}(t)$ e della soluzione dell'omogenea associata $\omega_{m,o}(t)$.

Si vede immediatamente che una soluzione particolare è

$$\omega_{m,p}(t) = \frac{B}{A} = \text{cost}$$

Infatti, inserita nell'equazione, la verifica.

Per l'omogenea associata si vede che l'equazione caratteristica è $\lambda + A = 0$, da cui $\lambda = -A$ e quindi la soluzione

$$\omega_{m,o}(t) = \text{cost } e^{\lambda t} = \text{cost } e^{-At}$$

Ma allora

$$\omega_m(t) = \text{cost } e^{-At} + \frac{B}{A}$$

La condizione iniziale è che $\omega_m(0) = 0$, pertanto:

$$\text{cost} + \frac{B}{A} = 0 \Rightarrow \text{cost} = -\frac{B}{A}$$

Dunque

$$\omega_m(t) = \frac{B}{A}(1 - e^{-At})$$

Risostituendo:

$$\begin{aligned} \omega_m(t) &= \frac{\frac{\eta_d M_m^{\max} - \tau M_r}{\eta_d J_m^* + \tau^2 J_u^*}}{\frac{\eta_d M_m^{\max}}{\omega_0(\eta_d J_m^* + \tau^2 J_u^*)}} \left(1 - e^{-\frac{\eta_d M_m^{\max}}{\omega_0(\eta_d J_m^* + \tau^2 J_u^*)} t}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega_m(t) = \omega_0 \left(1 - \frac{\tau M_r}{\eta_d M_m^{\max}}\right) \left(1 - e^{-\frac{\eta_d M_m^{\max}}{\omega_0(\eta_d J_m^* + \tau^2 J_u^*)} t}\right) \end{aligned}$$

Se ricordiamo le relazioni $M_m^{\max} = \frac{kV}{R}$ e $\omega_0 = \frac{V}{k}$ per il motore DC, troviamo

$$\omega_m(t) = \left(\frac{V}{k} - \frac{\tau M_r R}{\eta_d k^2}\right) \left(1 - e^{-\frac{\eta_d k^2}{R(\eta_d J_m^* + \tau^2 J_u^*)} t}\right)$$

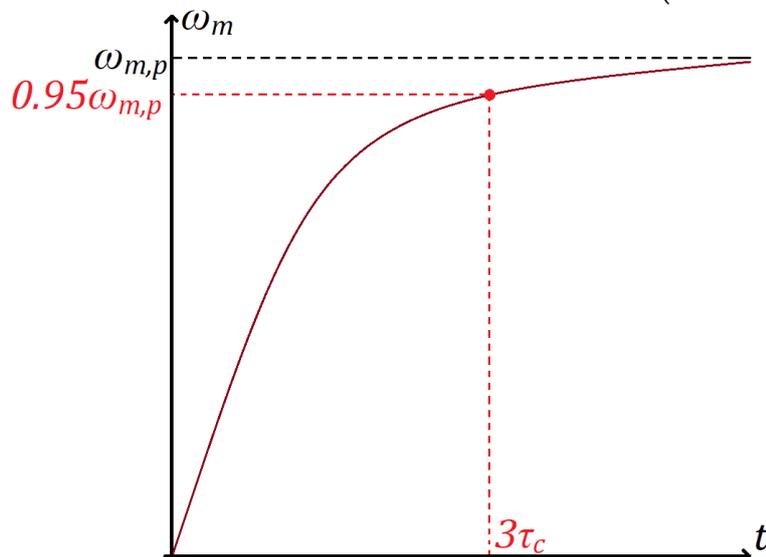
Si è soliti, per andamenti di questo tipo, definire una costante di tempo

$$\tau_c = \frac{R(\eta_d J_m^* + \tau^2 J_u^*)}{\eta_d k^2}$$

trascorsa tre volte la quale si è a circa il 95% della velocità di regime $\omega_{m,p} = \frac{V}{k} - \frac{\tau M_r R}{\eta_d k^2}$ (infatti

$$\omega_m(3\tau_c) = (1 - e^{-3}) \left(\frac{V}{k} - \frac{\tau M_r R}{\eta_d k^2}\right) \approx 0.95 \omega_{m,p}.$$

Tracciamo l'andamento della funzione $\omega_m(t) = \omega_{m,p} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}\right)$:



13) Modello dinamico di un ascensore

Per un ascensore composto da un motore elettrico, un volano per il controllo dell'accelerazione, una trasmissione composta da una ruota elicoidale e vite senza fine e una puleggia che movimentata la cabina e il contrappeso, assumendo come variabile indipendente la velocità angolare dell'albero motore ω_m , si determinino:

- le relazioni cinematiche tra le varie parti del sistema e il modello fisico;
- nel caso di moto in salita,
 - i flussi di potenza attraverso la trasmissione e le potenze perse, esprimendo le condizioni affinché il moto sia diretto oppure retrogrado;
 - il modello dinamico del moto vario tramite il bilancio delle potenze nel caso di moto diretto;
 - il regime assoluto e le condizioni perché si stabilisca il moto diretto o viceversa retrogrado;
- nel caso di moto in discesa, il modello dinamico del moto vario.

Valgono per il sistema le relazioni cinematiche che collegano moto dell'albero motore (con volano) ω_m , moto della puleggia ω_p e di cabina e contrappeso v_c e v_q :

$$\omega_p = \tau \omega_m$$

$$v = v_c = v_q = \omega_p r_p$$

Nel caso di moto in salita si possono scrivere le relazioni necessarie a costruire il bilancio delle potenze:

$$W_m = M_m \omega_m$$

$$W_u = -(m_c + m_u)gv + m_q gv$$

$$= -(m_c + m_u - m_q)gr_p \tau \omega_m$$

$$E_m^c = \frac{1}{2}(J_m + J_v)\omega_m^2 = \frac{1}{2}J\omega_m^2$$

$$E_u^c = \frac{1}{2}J_p \omega_p^2 + \frac{1}{2}(m_c + m_u + m_q)v^2 = \frac{1}{2}J_p \omega_p^2 + \frac{1}{2}m_{tot}v^2 = \frac{1}{2}(J_p + r_p^2 m_{tot})\tau^2 \omega_m^2$$

$$\frac{dE_{tot}^c}{dt} = J\omega_m \dot{\omega}_m + (J_p + r_p^2 m_{tot})\tau^2 \omega_m \dot{\omega}_m$$

Serve anche la potenza persa nella trasmissione, ma per averne la relazione devo conoscere la direzione del flusso di potenza (moto diretto o retrogrado), il quale è influenzato da diversi fattori come l'accelerazione istantanea del sistema o la prevalenza della massa del contrappeso su quella di cabina più utilizzatore (infatti si sceglie la massa del contrappeso come somma di quella della cabina e della metà del carico trasportabile massimo, così che tra le due masse contrapposte ci sia sempre un'eccedenza che non supera la metà del carico trasportabile massimo). Se è incognita la cinematica, occorrerà ipotizzare una condizione di moto diretto o retrogrado, svolgere i calcoli e verificarla. Se invece la si conosce, è facile verificare le condizioni di moto osservando il segno di $W_1 = W_m - \frac{dE_m^c}{dt}$ o $W_2 = W_u - \frac{dE_u^c}{dt}$ (positivo il primo se il moto è diretto, positivo il secondo se retrogrado).

Supponiamo di verificare

$$W_1 = M_m \omega_m - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J \omega_m^2 \right] = (M_m - J \dot{\omega}_m) \omega_m > 0$$

o di ipotizzare il moto diretto. Allora:

$$W_p = -(1 - \eta_d)W_1 = -(1 - \eta_d)(M_m - J \dot{\omega}_m) \omega_m$$

Il bilancio delle potenze è quindi

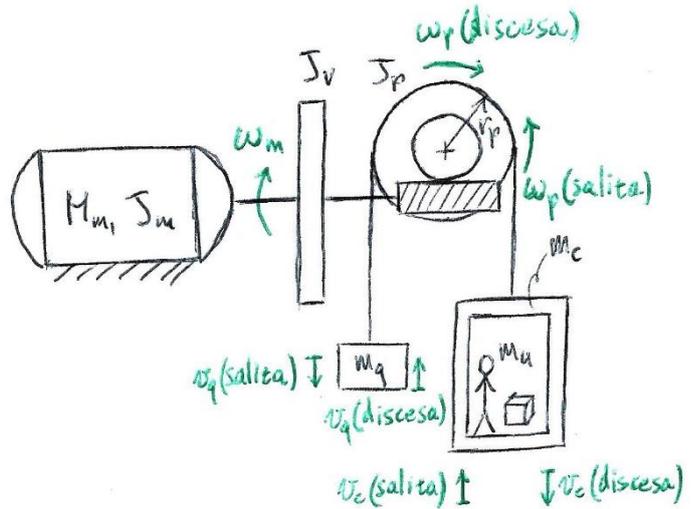
$$M_m \omega_m - (1 - \eta_d)(M_m - J \dot{\omega}_m) \omega_m - (m_c + m_u - m_q)gr_p \tau \omega_m$$

$$= J\omega_m \dot{\omega}_m + (J_p + r_p^2 m_{tot})\tau^2 \omega_m \dot{\omega}_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta_d M_m - (m_c + m_u - m_q)gr_p \tau = [\eta_d J + (J_p + r_p^2 m_{tot})\tau^2] \dot{\omega}_m$$

Esplicitando l'accelerazione:

$$\dot{\omega}_m = \frac{\eta_d M_m - (m_c + m_u - m_q)gr_p \tau}{\eta_d J + (J_p + r_p^2 m_{tot})\tau^2}$$



L'equazione del regime assoluto (cioè per $\dot{\omega}_m = 0$) è ovviamente

$$\eta_d M_m - (m_c + m_u - m_q) g r_p \tau = 0 \quad \Rightarrow \quad M_m = \frac{1}{\eta_d} (m_c + m_u - m_q) g r_p \tau$$

e la condizione perché – sempre in regime assoluto – si stabilisca moto diretto diventa

$$W_1 = M_m \omega_m > 0$$

Se così non è, il moto sarà retrogrado.

Se invece si verifica

$$\begin{aligned} W_2 &= -(m_c + m_u - m_q) g r_p \tau \omega_m - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2 \omega_m^2 \right] \\ &= [-(m_c + m_u - m_q) g r_p \tau - (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2 \dot{\omega}_m] \omega_m > 0 \end{aligned}$$

o si ipotizza il moto retrogrado, la potenza persa è

$$W_p = -(1 - \eta_r) W_2 = -(1 - \eta_r) [-(m_c + m_u - m_q) g r_p \tau - (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2 \dot{\omega}_m] \omega_m$$

e allora il bilancio di potenze è

$$\begin{aligned} M_m \omega_m - (1 - \eta_r) [-(m_c + m_u - m_q) g r_p \tau - (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2 \dot{\omega}_m] \omega_m - (m_c + m_u - m_q) g r_p \tau \omega_m \\ = J \omega_m \dot{\omega}_m + (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2 \omega_m \dot{\omega}_m \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad M_m - (m_c + m_u - m_q) g r_p \tau \eta_r = [J + (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2 \eta_r] \dot{\omega}_m \end{aligned}$$

Esplicitando l'accelerazione:

$$\dot{\omega}_m = \frac{M_m - (m_c + m_u - m_q) g r_p \tau \eta_r}{J + (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2 \eta_r}$$

L'equazione del regime assoluto (cioè per $\dot{\omega}_m = 0$) è ovviamente

$$M_m - (m_c + m_u - m_q) g r_p \tau \eta_r = 0 \quad \Rightarrow \quad M_m = \eta_r (m_c + m_u - m_q) g r_p \tau$$

e la condizione perché – sempre in regime assoluto – si stabilisca moto retrogrado diventa

$$W_2 = -(m_c + m_u - m_q) g r_p \tau \omega_m > 0$$

Se il moto fosse in discesa, cambierebbe solo l'espressione di W_u in

$$W_u = (m_c + m_u) g v - m_q g v = (m_c + m_u - m_q) g r_p \tau \omega_m$$

Infatti ora il prodotto scalare tra \vec{v}_c e \vec{g} sarebbe positivo, mentre quello tra \vec{v}_q e \vec{g} negativo.

Allora in condizioni di moto diretto (ossia $M_m - J \dot{\omega}_m > 0$ oppure $(m_c + m_u - m_q) g r_p \tau - (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2 \dot{\omega}_m < 0$), si scriverà il bilancio delle potenze

$$\begin{aligned} M_m \omega_m - (1 - \eta_d) (M_m - J \dot{\omega}_m) \omega_m + (m_c + m_u - m_q) g r_p \tau \omega_m \\ = J \omega_m \dot{\omega}_m + (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2 \omega_m \dot{\omega}_m \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \eta_d M_m + (m_c + m_u - m_q) g r_p \tau = [\eta_d J + (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2] \dot{\omega}_m \end{aligned}$$

Esplicitando l'accelerazione:

$$\dot{\omega}_m = \frac{\eta_d M_m + (m_c + m_u - m_q) g r_p \tau}{\eta_d J + (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2}$$

In condizioni di moto retrogrado (ossia $(m_c + m_u - m_q) g r_p \tau - (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2 \dot{\omega}_m > 0$) oppure $M_m - J \dot{\omega}_m < 0$, invece:

$$\begin{aligned} M_m \omega_m - (1 - \eta_r) [(m_c + m_u - m_q) g r_p \tau - (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2 \dot{\omega}_m] \omega_m - (m_c + m_u - m_q) g r_p \tau \omega_m \\ = J \omega_m \dot{\omega}_m + (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2 \omega_m \dot{\omega}_m \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad M_m + (m_c + m_u - m_q) g r_p \tau \eta_r = [J + (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2 \eta_r] \dot{\omega}_m \end{aligned}$$

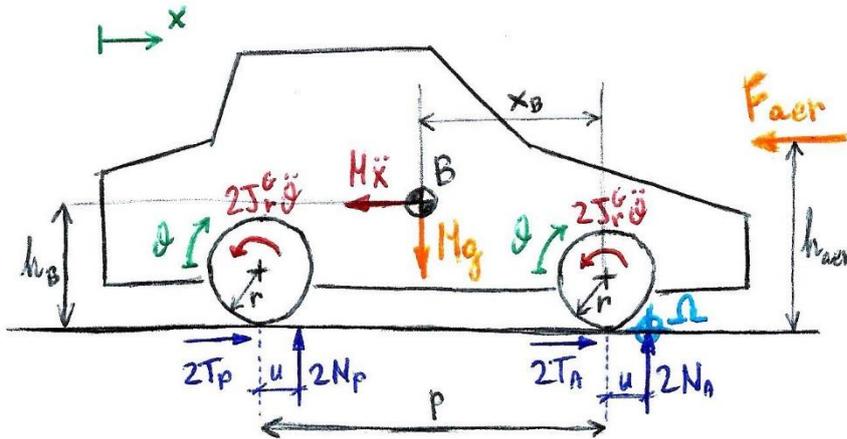
Esplicitando l'accelerazione:

$$\dot{\omega}_m = \frac{M_m + (m_c + m_u - m_q) g r_p \tau \eta_r}{J + (J_p + r_p^2 m_{tot}) \tau^2 \eta_r}$$

14) Modello dinamico di un veicolo terrestre

Per un'automobile in moto rettilineo in piano con trazione posteriore, si descriva il transitorio di accelerazione e il regime assoluto. In particolare:

- si definiscano le relazioni cinematiche di interesse e il modello fisico;
- assumendo come variabile indipendente la traslazione del veicolo x , si determini il modello dinamico tramite il bilancio delle potenze;
- in regime assoluto, si determini il grado di ammissione al motore a combustione interna per un'assegnata velocità \bar{x} ;
- per le condizioni di moto calcolate al punto b) si definisca
 - il diagramma di corpo libero del veicolo completo,
 - il diagramma di corpo libero delle ruote anteriori e
 - la verifica di aderenza delle quattro ruote.



Le variabili cinematiche in gioco sono: la rotazione delle ruote $\omega_u = \dot{\vartheta}$, la traslazione orizzontale del veicolo \dot{x} e la rotazione dell'albero motore ω_m . Sono così legate tra loro:

$$\dot{x} = \dot{\vartheta} r$$

$$\tau = \frac{\omega_u}{\omega_m}$$

dove τ è la produttoria di tutti i rapporti di trasmissione intermedi. Vale pertanto

$$\omega_m = \frac{\dot{x}}{r\tau}$$

Per quanto concerne la dinamica:

- le ruote del veicolo sono tutte uguali, aventi raggio r , massa m_r e momento d'inerzia J_r^G ;
- è nota la posizione del centro di massa del veicolo, avente massa totale $M = m_{scocca} + 4m_r + m_{pass} + m_{motore}$;
- al motore si avranno un momento M_m e un momento d'inerzia J_m ridotti all'asse;
- la trasmissione ha un rendimento η che è produttoria – sotto le opportune ipotesi – dei rendimenti delle singole trasmissioni, sia nel moto diretto che in quello retrogrado;
- il veicolo subisce una forza di resistenza aerodinamica e le sue ruote una resistenza a rotolamento (sono le azioni dinamiche “utilizzatrici”).

Si procede alla scrittura del bilancio delle potenze:

$$W_m = M_m \omega_m = M_m \frac{\dot{x}}{r\tau}$$

$$\begin{aligned} W_u = W_{aer} + W_{rot} &= \vec{F}_{aer} \cdot \vec{\dot{x}} - 2N_A f_v \dot{x} - 2N_P f_v \dot{x} = -F_{aer} \dot{x} - 2(N_A + N_P) f_v \dot{x} \\ &= -\frac{1}{2} C_x S \rho \dot{x}^2 \dot{x} - M g f_v \dot{x} = -\left(\frac{1}{2} C_x S \rho \dot{x}^2 + M g f_v\right) \dot{x} \end{aligned}$$

(dove sono state usate: la definizione di potenza dissipata per rotolamento su ciascuna ruota, la formula per la resistenza aerodinamica globale e la considerazione che per il bilancio delle forze verticali esterne ho $Mg = 2(N_A + N_P)$)

$$E_m^c = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 = \frac{1}{2} J_m \left(\frac{\dot{x}}{r\tau}\right)^2$$

$$E_u^c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_r^G \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + 4 \frac{1}{2} J_r^G \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2$$

$$E_{tot}^c = \frac{1}{2} \left(\frac{J_m}{r^2 \tau^2} + M + 4 \frac{J_r^G}{r^2}\right) \dot{x}^2 \Rightarrow \frac{d}{dt} E_{tot}^c = \left(\frac{J_m}{r^2 \tau^2} + M + 4 \frac{J_r^G}{r^2}\right) \dot{x} \ddot{x}$$

Un bilancio delle potenze fatto su un volume di controllo che include solo il motore restituisce che la potenza che vi esce è $W_1^m = -W_m + \frac{dE_m^c}{dt}$. Questa è l'opposto di quella W_1 che entra nella trasmissione.

Allora la potenza persa in trasmissione nel caso di moto diretto sarà

$$W_p = -(1 - \eta)W_1 = -(1 - \eta) \left(W_m - \frac{dE_m^c}{dt} \right) = -(1 - \eta) \left(\frac{M_m}{r\tau} - \frac{J_m}{r^2\tau^2} \dot{x} \right) \dot{x}$$

Il bilancio delle potenze $W_m + W_p + W_u = \frac{d}{dt} E_{tot}^c$ è (semplificando preventivamente una \dot{x} ovunque):

$$\frac{M_m}{r\tau} - (1 - \eta) \left(\frac{M_m}{r\tau} - \frac{J_m}{r^2\tau^2} \dot{x} \right) - \left(\frac{1}{2} C_x S \rho \dot{x}^2 + M g f_v \right) = \left(\frac{J_m}{r^2\tau^2} + M + 4 \frac{J_r^G}{r^2} \right) \dot{x}$$

Semplificando dei termini ed esplicitando l'accelerazione

$$\dot{x} = \frac{\eta M_m - \frac{1}{2} C_x S \rho \dot{x}^2 - M g f_v}{\frac{\eta J_m}{r^2\tau^2} + M + 4 \frac{J_r^G}{r^2}}$$

Nel caso di regime assoluto, cioè

$$\frac{dE_{tot}^c}{dt} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \bar{x} = cost$$

dovrò avere

$$\overline{M_m} = \frac{r\tau}{\eta} \left(\frac{1}{2} C_x S \rho \bar{x}^2 + M g f_v \right)$$

Essendo che l'espressione analitica della curva caratteristica di un motore alternativo a combustione interna è

$$M_m(\omega_m) = M_m \left(\frac{\dot{x}}{r\tau} \right) = M_m^{min} \left(\frac{\dot{x}}{r\tau} \right) + \gamma \left[M_m^{max} \left(\frac{\dot{x}}{r\tau} \right) - M_m^{min} \left(\frac{\dot{x}}{r\tau} \right) \right]$$

Allora in regime assoluto il grado di ammissione per una velocità \bar{x} è

$$\bar{\gamma} = \frac{M_m \left(\frac{\bar{x}}{r\tau} \right) - M_m^{min} \left(\frac{\bar{x}}{r\tau} \right)}{M_m^{max} \left(\frac{\bar{x}}{r\tau} \right) - M_m^{min} \left(\frac{\bar{x}}{r\tau} \right)} = \frac{\frac{r\tau}{\eta} \left(\frac{1}{2} C_x S \rho \bar{x}^2 + M g f_v \right) - M_m^{min} \left(\frac{\bar{x}}{r\tau} \right)}{M_m^{max} \left(\frac{\bar{x}}{r\tau} \right) - M_m^{min} \left(\frac{\bar{x}}{r\tau} \right)}$$

N.B. Da questo dato si può ricavare il consumo di carburante per mantenersi a una data velocità.

Quanto detto finora vale solo se le ruote rotolano senza strisciare sul terreno, ossia occorre verificare che

$$\begin{cases} T_A < f_s N_A \\ T_P < f_s N_P \end{cases}$$

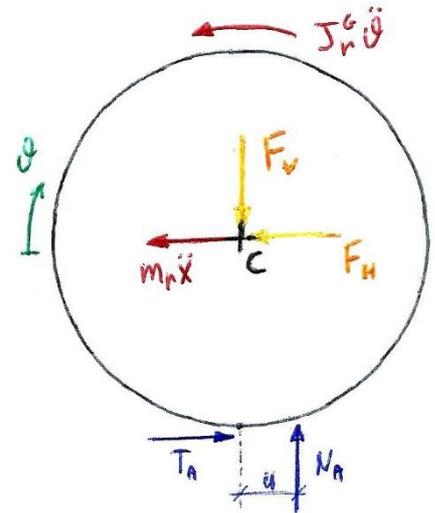
Eppure il metodo scelto (bilancio delle potenze) per risolvere la dinamica del sistema non fornisce queste quattro reazioni vincolari. Tramite diagrammi di corpo libero occorrerà scrivere bilanci pari a quattro equazioni indipendenti, ossia sufficienti a trovare le incognite cercate. Scriveremo:

- il bilancio delle forze esterne verticali,
- il bilancio delle forze esterne orizzontali,
- il bilancio dei momenti esterni con polo Ω e
- il bilancio dei momenti interni ed esterni agenti su una delle ruote anteriori con polo C ,

ossia:

$$\begin{cases} 2(N_A + N_P) - Mg = 0 \\ -M\ddot{x} - \frac{1}{2} C_x S \rho \dot{x}^2 + 2(T_A + T_P) = 0 \\ -2pN_P + 4J_r^G \ddot{\theta} + h_B M \ddot{x} + h_{aer} \frac{1}{2} C_x S \rho \dot{x}^2 + (x_B + u) Mg = 0 \\ J_r^G \ddot{\theta} + rT_A + uN_A = 0 \end{cases}$$

Il sistema restituisce T_A , T_P , N_A e N_P i quali – ora noti – possono essere sottoposti alla verifica di aderenza.



15) Modello dinamico di un treno

Per un treno in moto rettilineo in piano, trascurando le deformazioni della barre di trazione e delle sospensioni, si descriva il transitorio di accelerazione e il regime assoluto. In particolare:

- si descriva il sistema meccanico corrispondente a un ETR.500, si definiscano le relazioni cinematiche di interesse e il modello fisico;
- si calcoli l'energia cinetica totale del sistema e la massa equivalente rispetto alla velocità del treno;
- si esprimano dettagliatamente le potenze motrici, resistenti e perse;
- assumendo come variabile indipendente la traslazione del treno x , si determini il modello dinamico tramite il bilancio delle potenze e si interpreti fisicamente l'espressione dell'accelerazione;
- si determini graficamente la velocità massima raggiungibile e si calcoli la corrispondente potenza motrice.

Un convoglio ferroviario ETR.500 è, nella sua configurazione più utilizzata, composto da due motrici, una in testa e una in coda e ciascuna equipaggiata con quattro motori in corrente continua (quindi $n_{mot} = 8$). Si immagina che le n_{ruote} ruote siano tutte uguali e rotolino tutte senza strisciare, per cui la velocità angolare di ciascuna ruota è legata alla traslazione orizzontale del treno x con

$$\omega_r = \frac{\dot{x}}{r}$$

Possiamo definire il rapporto di trasmissione

$$\tau = \frac{\omega_r}{\omega_m}$$

L'energia cinetica totale è somma di quella lato motore, quindi

$$E_m^c = n_{mot} \left(\frac{1}{2} J_m \omega_m^2 \right)$$

e di quella lato utilizzatore, per la quale bisogna ragionare sul fatto che, se n_v è il numero di veicoli (ossia 12 nel nostro caso), per ogni veicolo si hanno una cassa (di massa m_{cassa_i}), due carrelli (di massa m_{carr_i}) e quattro sale (di massa m_{sala_i} e momento d'inerzia J_{r_i}). Così avremo

$$E_u^c = \sum_{i=1}^{n_v} \left[\frac{1}{2} m_{cassa_i} \dot{x}^2 + 2 \frac{1}{2} m_{carr_i} \dot{x}^2 + 4 \left(\frac{1}{2} m_{sala_i} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_{r_i} \omega_r^2 \right) \right]$$

Considerando che $\omega_r = \frac{\dot{x}}{r}$, abbiamo che

$$E_u^c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_v} \left[m_{cassa_i} + 2m_{carr_i} + 4m_{sala_i} + 4 \frac{J_{r_i}}{r^2} \right] \dot{x}^2$$

Pongo

$$\begin{aligned} m_{eq} &= \sum_{i=1}^{n_v} \left[m_{cassa_i} + 2m_{carr_i} + 4m_{sala_i} + 4 \frac{J_{r_i}}{r^2} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n_v} \left[m_{cassa_i} + 2m_{carr_i} + 4m_{sala_i} \right] + 4 \sum_{i=1}^{n_v} \frac{J_{r_i}}{r^2} = m_{tot} + 4n_v \frac{J_r}{r^2} \end{aligned}$$

(dove si vede facilmente che la prima sommatoria è la massa totale m_{tot} del treno e che la seconda sommatoria, essendo i J_{r_i} tutti uguali, ha solo l'effetto di moltiplicare per il numero di veicoli il momento d'inerzia) la massa equivalente per la traslazione, cosicché si possa scrivere

$$E_u^c = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2$$

La potenza motrice di ciascun motore è $M_m \omega_m$, quindi quella totale sarà

$$W^m = n_{mot} M_m \omega_m$$

A ostacolare il moto sono la resistenza al rotolamento e la resistenza aerodinamica.

Per quest'ultima, se ρ è la densità dell'aria, S la sezione maestra e C_x il coefficiente globale di resistenza aerodinamica e quindi la forza è $\vec{F}_{aer} = -\frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 \hat{x}$, si ha

$$W_{aer} = \vec{F}_{aer} \cdot \vec{\dot{x}} = -\frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^3$$

Per l'attrito volvente, notiamo che la potenza dissipata da ciascuna ruota (immaginando la reazione vincolare normale N_i spostata di un $u = f_v r$) è $W_{rot_i} = -N_i f_v \dot{x}$, così quella totale sarà

$$W_{rot} = -\sum_{i=1}^{n_{assi}} N_i f_v \dot{x}$$

Eppure la quantità $\sum_{i=1}^{n_{assi}} N_i$ non è nient'altro che il peso totale del veicolo $m_{tot} g$, per cui

$$W_{rot} = -m_{tot} g f_v \dot{x}$$

Occorre poi prendere in considerazione la potenza persa in trasmissione. Nello studio di un transitorio di avviamento a partire da veicolo fermo il moto è sicuramente diretto, quindi

$$W_p = n_{mot} [-(1 - \eta_d)(M_m - J_m \dot{\omega}_m) \omega_m]$$

Si può dunque scrivere il bilancio delle potenze

$$\begin{aligned} W^m + W_p + W_{aer} + W_{rot} &= \frac{d}{dt} (E_m^c + E_u^c) \Rightarrow \\ \Rightarrow n_{mot} M_m \omega_m - n_{mot} (1 - \eta_d) (M_m - J_m \dot{\omega}_m) \omega_m - \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^3 - m_{tot} g f_v \dot{x} \\ &= \frac{d}{dt} \left(n_{mot} \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow n_{mot} M_m \omega_m - n_{mot} (1 - \eta_d) (M_m - J_m \dot{\omega}_m) \omega_m - \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^3 - m_{tot} g f_v \dot{x} \\ &= n_{mot} J_m \omega_m \dot{\omega}_m + m_{eq} \dot{x} \ddot{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \eta_d n_{mot} M_m \omega_m - \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^3 - m_{tot} g f_v \dot{x} &= \eta_d n_{mot} J_m \omega_m \dot{\omega}_m + m_{eq} \dot{x} \ddot{x} \end{aligned}$$

Ricordiamo che

$$\omega_m = \frac{\omega_r}{\tau} = \frac{\dot{x}}{r\tau} \Rightarrow \dot{\omega}_m = \frac{\dot{\omega}_r}{\tau} = \frac{\ddot{x}}{r\tau}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \eta_d n_{mot} M_m \frac{\dot{x}}{r\tau} - \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^3 - m_{tot} g f_v \dot{x} &= \eta_d n_{mot} J_m \frac{\dot{x}}{r\tau} \frac{\ddot{x}}{r\tau} + m_{eq} \dot{x} \ddot{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{x} &= \frac{\frac{\eta_d n_{mot} M_m}{r\tau} - \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 - m_{tot} g f_v}{\frac{\eta_d n_{mot} J_m}{r^2 \tau^2} + m_{eq}} \end{aligned}$$

Appare chiaro dall'equazione che:

- il treno accelera tanto più quanto più è grande la coppia che i motori possono erogare e quanti più sono i motori stessi;
- il treno accelera tanto meno quanto più è basso il rendimento, ma anche quanto più è alta la velocità (al quadrato!) contenuta nel termine aerodinamico o quanto più sono grandi la massa totale e il coefficiente di attrito viscoso; tutto questo senza dimenticarci dell'inerzia totale equivalente, termine che compare al denominatore e che pertanto rende più difficoltosa l'accelerazione se è grande;
- non è lineare: infatti l'accelerazione dipende dalla velocità sia a causa di M_m , che è funzione di ω_m e quindi di \dot{x} , che per via del termine aerodinamico; andrà quindi risolta numericamente.

Per il regime assoluto basta porre $\dot{\omega}_m = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0$, quindi l'equazione del moto è

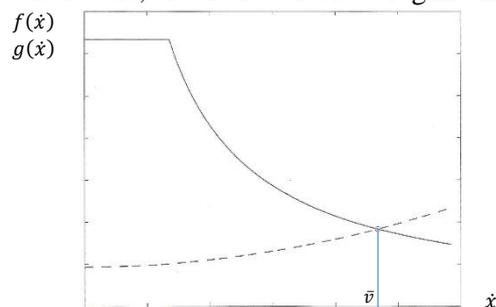
$$\frac{\eta_d n_{mot} M_m}{r\tau} - \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 - m_{tot} g f_v = 0$$

Anche questa sarà da risolvere numericamente vista la dipendenza di M_m da \dot{x} .

Si può risolvere graficamente la velocità massima raggiunta dal convoglio a regime. Se infatti definisco due funzioni delle velocità \dot{x}

$$\begin{aligned} f(\dot{x}) &= \frac{\eta_d n_{mot}}{r\tau} M_m(\dot{x}) \\ g(\dot{x}) &= \frac{1}{2} \rho S C_x \dot{x}^2 + m_{tot} g f_v \end{aligned}$$

e le traccio, si avrà la velocità a regime in corrispondenza della loro intersezione:



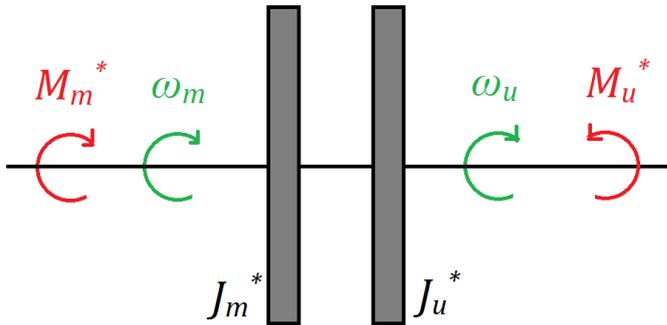
Trovata tale velocità \bar{v} , si trova una $\bar{\omega}_m = \frac{\bar{v}}{r\tau}$ e con questa si calcola la potenza motrice

$$W_{reg}^m = n_{mot} M_m(\bar{\omega}_m) \bar{\omega}_m$$

16) Modello di un gruppo di macchine periodico

Si consideri un gruppo di macchine composto da un motore, una trasmissione e un utilizzatore, per il quale non si può prescindere dalla dipendenza dalla posizione dei rispettivi alberi; indicando la posizione e la velocità angolari con α_i e $\dot{\alpha}_i = \omega_i$ (dove $i = m, u$) si ha: $M_m^*(\alpha_m, \dot{\alpha}_m)$, $J_m^*(\alpha_m)$ e $M_u^*(\alpha_u, \dot{\alpha}_u)$, $J_u^*(\alpha_u)$. Descrivere:

- le situazioni in cui è necessario ricorrere a questo modello più complesso;
- il modello periodico del gruppo di macchine e il procedimento per ottenerlo;
- le differenze rispetto al modello che può avere il regime assoluto;
- le condizioni per il funzionamento in regime periodico;
- la definizione del grado di irregolarità periodica e la sua approssimazione tramite la variazione massima dell'energia cinetica quando l'inerzia si può ritenere costante;
- un esempio di gruppo con un momento motore costante e un momento resistente costante a tratti, ricavando
 - le condizioni affinché si stabilisca un moto periodico e
 - il grado di irregolarità periodica.



È necessario ricorrere al modello più complesso di gruppo di macchine o quando la dipendenza dei momenti e momenti d'inerzia motore e utilizzatore dalla posizione angolare dell'albero è più palesemente non trascurabile o quando si vogliono studiare fenomeni come le vibrazioni del sistema.

Per illustrare il modello si fa ricorso a un gruppo con 1 gdl in cui motore e utilizzatore sono calettati sullo stesso albero (trasmissione

assente, quindi $\tau = \eta = 1 \Rightarrow \alpha_m = \alpha_u = \alpha$, $\omega_m = \omega_u = \omega$, $W_p = 0$). Avremo sempre che

$$W_m = M_m^*(\alpha, \omega)\omega$$

$$W_u = M_u^*(\alpha, \omega)\omega$$

però, contrariamente al modello semplificato, ho

$$\begin{aligned} \frac{dE_{tot}^c}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J_m^*(\alpha) \omega^2 + \frac{1}{2} J_u^*(\alpha) \omega^2 \right] = J_m^*(\alpha) \omega \dot{\omega} + \frac{1}{2} \frac{dJ_m^*(\alpha)}{dt} \omega^2 + J_u^*(\alpha) \omega \dot{\omega} + \frac{1}{2} \frac{dJ_u^*(\alpha)}{dt} \omega^2 \\ &= \left[(J_m^*(\alpha) + J_u^*(\alpha)) \dot{\omega} + \frac{1}{2} (J_m^{*'}(\alpha) + J_u^{*'}(\alpha)) \omega^2 \right] \omega \end{aligned}$$

dove con l'apice è indicata la derivata della funzione per il proprio argomento ed è stata utilizzata la regola di derivazione delle funzioni composte $\frac{dJ_i^*(\alpha)}{dt} = J_i^{*'}(\alpha) \omega$.

Il bilancio delle potenze è allora

$$M_m^*(\alpha, \omega)\omega + M_u^*(\alpha, \omega)\omega = \left[(J_m^*(\alpha) + J_u^*(\alpha)) \dot{\omega} + \frac{1}{2} (J_m^{*'}(\alpha) + J_u^{*'}(\alpha)) \omega^2 \right] \omega$$

Semplificando ω a entrambi i membri ed esplicitando $\dot{\omega}$:

$$\dot{\omega} = \frac{M_m^*(\alpha, \omega) + M_u^*(\alpha, \omega) - \frac{1}{2} (J_m^{*'}(\alpha) + J_u^{*'}(\alpha)) \omega^2}{J_m^*(\alpha) + J_u^*(\alpha)}$$

Se chiamo momento d'inerzia quadratico

$$M_{iq}(\alpha, \omega) = -\frac{1}{2} (J_m^{*'}(\alpha) + J_u^{*'}(\alpha)) \omega^2$$

e $J^*(\alpha) = J_m^*(\alpha) + J_u^*(\alpha)$, ho

$$\dot{\omega} = \frac{M_m^*(\alpha, \omega) + M_u^*(\alpha, \omega) + M_{iq}(\alpha, \omega)}{J^*(\alpha)}$$

Attenzione: in questo modello abbiamo forze d'inerzia (rappresentate da M_{iq}) presenti anche in assenza di accelerazione $\dot{\omega}$.

Inoltre, è sostanzialmente impossibile che si verifichi il regime assoluto: infatti in questo caso deve verificarsi per definizione che $\frac{dE_{tot}^c}{dt} = 0$; quindi il bilancio delle potenze diventa

$$[M_m^*(\alpha, \omega) + M_u^*(\alpha, \omega)]\omega = \frac{dE_{tot}^c}{dt} = 0$$

Tralasciando la soluzione ovvia in cui il sistema è fermo ($\omega = 0$), l'altra impone che $M_m^*(\alpha, \omega)$ e $M_u^*(\alpha, \omega)$ siano opposti istante per istante, condizione che non si verifica praticamente mai.

L'energia cinetica del sistema è dunque suscettibile di inevitabili variazioni nel tempo, ma in condizioni di regime periodico questa varia ciclicamente con periodo T . Se allora si integra la variazione di energia cinetica (membro di destra del bilancio delle potenze) in un intervallo di tempo pari al periodo, si ha

$$\int_t^{t+T} \frac{dE_{tot}^c}{dt} dt = \int_{E_{tot}^c(t)}^{E_{tot}^c(t+T)} dE_{tot}^c = E_{tot}^c(t+T) - E_{tot}^c(t) = 0$$

poiché $\forall t \quad E_{tot}^c(t+T) = E_{tot}^c(t)$.

Il membro di sinistra del bilancio delle potenze, dunque, se integrato sullo stesso intervallo risulta nullo. Definiamo il periodo angolare $\mathbb{A} = \alpha(t+T) - \alpha(t)$ e svolgiamo questo membro

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} [M_m^*(\alpha, \omega) + M_u^*(\alpha, \omega)] \omega dt &= \left[\text{cambio: } \begin{array}{l} var \Rightarrow d\alpha = \dot{\alpha} dt = \omega dt \\ extr \Rightarrow \begin{array}{l} t \leftrightarrow \alpha(t) \\ t+T \leftrightarrow \alpha(t+T) \end{array} \end{array} \right] \\ &= \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t+T)} [M_m^*(\alpha, \omega) + M_u^*(\alpha, \omega)] d\alpha \end{aligned}$$

Imponendolo nullo e mediando su \mathbb{A} , si ha la condizione per il regime periodico:

$$\frac{1}{\mathbb{A}} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t)+\mathbb{A}} M_m^*(\alpha, \omega) d\alpha = -\frac{1}{\mathbb{A}} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t)+\mathbb{A}} M_u^*(\alpha, \omega) d\alpha$$

Nel caso di regime periodico una velocità ω caratteristica del sistema oscillerà tra due valori ω_{max} e ω_{min} e intorno a un valore medio $\omega_{med} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}$. Si definisce irregolarità periodica la grandezza

$$i = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{med}}$$

che dà misura dell'oscillazione del sistema (è l'ampiezza di questa infatti che può provocare danni, non il valore medio in senso assoluto).

L'irregolarità periodica va contenuta entro il 2÷3%, ma come? Si ricava una seconda espressione (approssimata) per i in funzione della variazione di energia cinetica del sistema.

Se

$$J_{med} = \frac{1}{\mathbb{A}} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t)+\mathbb{A}} [J_m^*(\alpha) + J_u^*(\alpha)] d\alpha$$

allora

$$\begin{aligned} \Delta_{max} E_{tot}^c &= E_{tot}^{c,max} - E_{tot}^{c,min} \approx \frac{1}{2} J_{med} \omega_{max}^2 - \frac{1}{2} J_{med} \omega_{min}^2 = \frac{1}{2} J_{med} (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2) \\ &= \frac{1}{2} J_{med} (\omega_{max} + \omega_{min})(\omega_{max} - \omega_{min}) = J_{med} \omega_{med} (\omega_{max} - \omega_{min}) \end{aligned}$$

dove si ricorda che $\frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} = \omega_{med}$.

Pertanto, se $\omega_{max} - \omega_{min} \approx \frac{\Delta E_{tot}^c}{J_{med} \omega_{med}}$, si avrà:

$$i \approx \frac{\Delta_{max} E_{tot}^c}{J_{med} \omega_{med}^2}$$

Si prende ora un esempio di gruppo con:

- un momento motore costante $M_m^* = \overline{M_m}$
- un momento resistente costante a tratti $M_u^*(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha \in [0, \frac{3}{2}\pi] \\ -M_r & \alpha \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi) \end{cases}$ (ma allora il periodo angolare è $\mathbb{A} = 2\pi$)

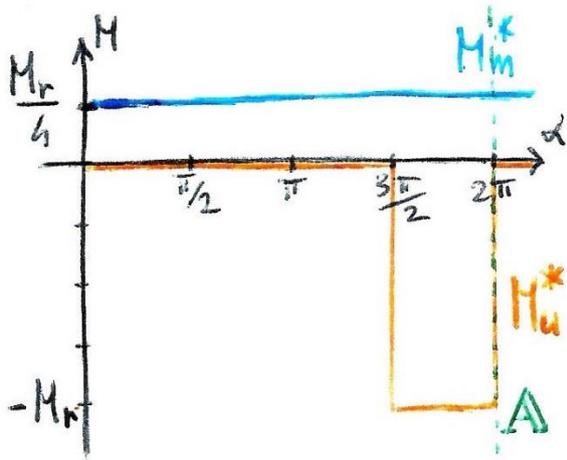
Qual è la condizione di regime periodico?

Dev'essere $\frac{1}{\mathbb{A}} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t)+\mathbb{A}} M_m^*(\alpha, \omega) d\alpha = -\frac{1}{\mathbb{A}} \int_{\alpha(t)}^{\alpha(t)+\mathbb{A}} M_u^*(\alpha, \omega) d\alpha$, quindi in questo caso:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{M_m} d\alpha = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_u^*(\alpha) d\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \overline{M}_m 2\pi = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} M_r d\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{M}_m = \frac{1}{4} M_r$$

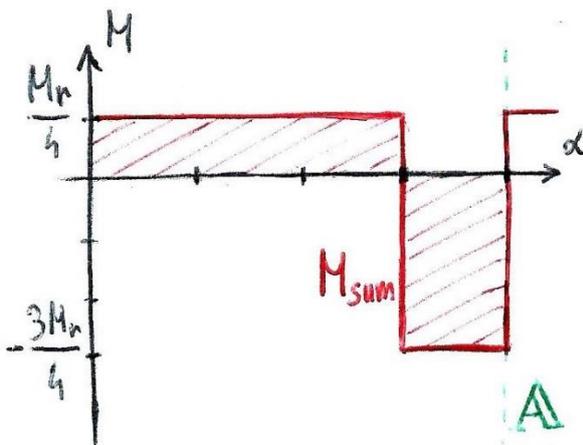


Qual è l'irregolarità periodica?

Per calcolarla con la formula approssimata abbiamo bisogno della massima variazione di energia cinetica

$$\Delta E_{tot}^c(\tilde{\alpha}) = E_{tot}^c(\tilde{\alpha}) - E_{tot}^c(0) = \int_{E_{tot}^c(0)}^{E_{tot}^c(\tilde{\alpha})} dE_{tot}^c = \int_0^{\tilde{\alpha}} \frac{dE_{tot}^c}{dt} dt = \int_0^{\tilde{\alpha}} [\overline{M}_m + M_u^*(\alpha)] d\alpha$$

$$= \int_0^{\tilde{\alpha}} M_{sum}(\alpha) d\alpha$$



Graficamente si vede che $\Delta_{max} E_{tot}^c = \frac{1}{4} M_r \frac{3}{2} \pi = \frac{3\pi}{8} M_r$ (infatti la massima variazione di energia cinetica corrisponde a una delle due aree sottese) e allora, calcolati J_{med} e ω_{med} :

$$i \approx \frac{3\pi}{8} \frac{M_r}{J_{med} \omega_{med}^2}$$

17) Trasmissioni rigide e con flessibili

Descrivere:

- la classificazione delle trasmissioni dal punto di vista del rapporto di trasmissione e della trasmissione delle forze;
- i campi d'impiego delle ruote di frizione, delle ruote dentate, delle cinghie piane, trapezoidali e dentate, delle catene e delle funi;
- le ruote di frizione in generale e in particolare
 - la cinematica,
 - la dinamica,
 - i pregi e i difetti.

Le trasmissioni sono elementi di macchina deputati alla distribuzione della potenza da uno o più motori a uno o più utilizzatori, modificandone spesso le caratteristiche (coppia e velocità angolare o forza e velocità) ma comportando inevitabilmente una perdita più o meno grande di potenza meccanica, dissipata in calore. Se la trasmissione avviene tra alberi rotanti, questi possono essere paralleli, concorrenti o sghembi e si sceglierà un tipo di elemento adatto (ad esempio, rispettivamente: ingranaggi cilindrici, ingranaggi conici o funi) a tale configurazione geometrica.

Il rapporto di trasmissione τ può essere:

- costante, come per gli ingranaggi o le cinghie, e gli elementi saranno definiti riduttori se $\tau < 1$ o moltiplicatori se $\tau > 1$;
- variabile, come per i cambi o i variatori di velocità.

Si hanno poi elementi di collegamento diretto tra alberi, definiti giunti se il collegamento è permanente durante il funzionamento oppure innesti se l'accoppiamento è inseribile o disinseribile senza smontaggio.

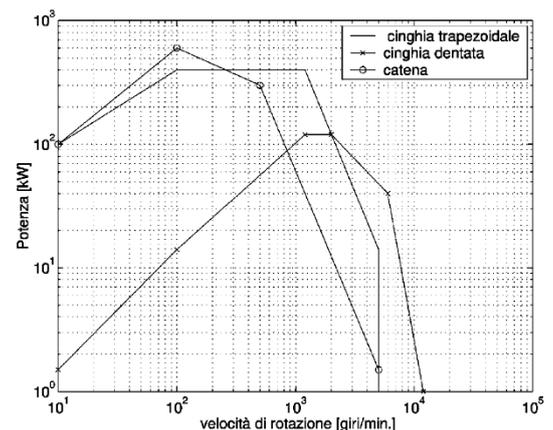
La potenza può essere trasmessa tramite:

- forze di attrito tangenziali, quindi con la possibilità che ci sia slittamento, fatto che può portare svantaggi in termini di limitazione della potenza trasmissibile (cosa che può però considerarsi un vantaggio in alcuni casi) e in termini di imprecisione del moto ma che si confronta col fatto che gli apparati di questo tipo sono in genere meno costosi; vi figurano, per quanto riguarda la nostra trattazione, le ruote di frizione (elementi rigidi) e funi, cinghie piane e cinghie trapezoidali (elementi flessibili);
- forze normali tra superfici coniugate, quindi senza slittamento e mantenendo una fase costante tra gli alberi, vantaggiose per questo e perché capaci di trasportare potenze alte (compatibili con la resistenza meccanica dell'elemento) ma in genere più costose, rumorose e sottoposte a usura dovuta allo strisciamento di tali superfici; vi figurano le ruote dentate (elementi rigidi) e le catene e le cinghie dentate (elementi flessibili).

In una tabella si riportano le classificazioni e i parametri dei vari tipi di trasmissione a confronto:

	Elementi	Forze	Potenza [kW]	Velocità periferica [m/s]	Rendimento	Rapporto di trasmissione	Rumorosità	Rapporto ingombro/potenza [dm ³ /kW]	
Ruote di frizione	rigidi	d'attrito	20	20	85 ÷ 95	1/6	media		
Ruote dentate	rigidi	normali	10 ⁵	20 ÷ 30	96 ÷ 98	1/6 ÷ 1/10	media	0.2 ÷ 0.6	
Cinghie	Piane	flessibili	d'attrito	150	60 ÷ 100	94 ÷ 98	1/6 ÷ 1/8	bassa	0.5 ÷ 4
	Trapezoidali			350	30 ÷ 40	91 ÷ 95	1/6 ÷ 1/10	bassa	0.4 ÷ 3
	Dentate		normali	120	60	95 ÷ 97	1/6 ÷ 1/10	bassa	0.25 ÷ 2
Catene	flessibili	normali	500	10 ÷ 30	94 ÷ 96	1/6 ÷ 1/10	alta	0.5 ÷ 2	
Funi	flessibili	d'attrito				1/6 ÷ 1/10	bassa		

Si raffigurano poi i campi di applicazione di alcuni tipi di trasmissione a elementi flessibili su un diagramma potenza-velocità angolare:



La trasmissione con ruote di frizione viene realizzata premendo due dischi lisci tra loro, in genere con asse parallelo con l'intento che in condizioni di idealità si realizzi un contatto di puro rotolamento. In realtà si assiste alla presenza di micro-scorrimenti nell'area d'impronta durante il funzionamento.

Dal punto di vista della cinematica, dato che impongo che la velocità periferica (cioè nel punto di contatto) sia la stessa per le due ruote, se la loro velocità angolare è ω_i e il loro raggio è r_i ($i = 1,2$), avrò che

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$

Quindi, se definisco il rapporto di trasmissione come $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, ottengo che

$$\tau = \frac{r_1}{r_2}$$

La dinamica, tramite la legge di Coulomb per l'attrito statico, fissa la massima potenza trasmissibile. Infatti, essendo N la forza normale che si scambiano i dischi, la massima reazione tangenziale ammissibile è

$$T_{max} = f_s N$$

La forza tangenziale si esprime come causa della coppia applicata sulla ruota motrice $C_1 = r_1 T$. Dunque la coppia massima trasmissibile sarà

$$C_{1,max} = r_1 T_{max} = r_1 f_s N$$

(di conseguenza la coppia massima che si troverà sulla ruota cedente sarà $C_{2,max} = \frac{C_{1,max}}{\tau} = r_2 f_s N$).

18) Ruote dentate

Per le ruote dentate e gli ingranaggi descrivere:

a) *le caratteristiche, i tipi di ruote dentate e ingranaggi, le superfici primitive;*

b) *per gli ingranaggi cilindrici,*

- i. *il raggio delle primitive in funzione dell'interasse, il numero di denti, il passo, il modulo e il rapporto di trasmissione,*
- ii. *l'influenza del profilo dei denti sul rapporto di trasmissione e sul momento trasmesso,*
- iii. *con profilo a evolvente di cerchio, la retta d'azione, il luogo dei contatti, la velocità di strisciamento, il centro d'istantanea rotazione del moto relativo, l'invarianza del rapporto di trasmissione dall'interasse, la dentiera base, la dinamica degli ingranaggi a denti dritti ed elicoidali e il dimensionamento modulare;*

c) *per gli ingranaggi conici,*

- i. *la descrizione cinematica,*
- ii. *il progetto dell'ingranaggio,*
- iii. *gli elementi geometrici,*
- iv. *la dinamica delle forze scambiate.*

Le ruote dentate sono organi di trasmissione che lavorano per spinte normali tra superfici coniugate e sono perciò deputate al trasporto di elevate potenze. Sono inoltre facilmente costruibili e montabili, oltre che essere molto compatte (rapporto ingombro/potenza basso). Ulteriore vantaggio è che garantiscono rapporto di trasmissione costante e fisso, così da essere in grado di mantenere la fase tra le rotazioni di albero motore e condotto. Una coppia di ruote ingranate costituisce un ingranaggio, mentre una combinazione di ingranaggi è detta rotismo.

La superficie rispetto alla quale si dimensiona la dentatura di una ruota presa singolarmente è detta primitiva di riferimento e rispetto a queste si classificano le ruote in

- cilindriche, se la primitiva di riferimento è un cilindro;
- coniche, se la primitiva di riferimento è un (tronco di) cono.

Le ruote dentate sono in grado di trasmettere il moto tra assi sia paralleli che concorrenti che sghembi e le superfici coniugate che si associano alle ruote di un ingranaggio in quanto realizzano durante il moto un rotolamento puro si dicono primitive di funzionamento. Ruote cilindriche a denti dritti possono trasmettere il moto solo tra assi paralleli con primitiva di funzionamento cilindrica, mentre quelle cilindriche a denti elicoidali sono in grado di interpersi sia tra assi paralleli che sghembi; nel primo caso la primitiva di funzionamento è sempre una superficie cilindrica, ma nel secondo il moto è trasmesso tramite il contatto per un punto e non per un segmento dei fianchi delle ruote (infatti tali trasmissioni si usano per potenze ridotte). Se si vuole accoppiare assi concorrenti, occorrerà ricorrere a ingranaggi a ruote coniche. Le primitive di funzionamento sono in questo caso anch'esse coniche. Le ruote coniche o approssimativamente coniche possono tuttavia trasmettere il moto anche tra assi sghembi e in tal caso la ruota conica è detta ipoide e le primitive di funzionamento sono iperboloidi iperbolici.

Se si tratta di ingranaggi cilindrici, per due ruote di raggi (primitivi di funzionamento) r_1 ed r_2 e numero di denti z_1 e z_2 , definiamo il passo come la zeta-esima parte della circonferenza primitiva:

$$p_1 = \frac{2\pi r_1}{z_1} \quad p_2 = \frac{2\pi r_2}{z_2}$$

Il passo normalizzato con π si dice invece modulo:

$$m_1 = \frac{p_1}{\pi} = \frac{2r_1}{z_1} \quad m_2 = \frac{p_2}{\pi} = \frac{2r_2}{z_2}$$

Allo stesso modo il passo angolare sarà la zeta-esima parte dell'angolo giro:

$$\vartheta_1 = \frac{2\pi}{z_1} \quad \vartheta_2 = \frac{2\pi}{z_2}$$

Nello stesso intervallo Δt le ruote spazzano passi angolari proporzionali alle loro velocità angolari; infatti:

$$\vartheta_1 = \omega_1 \Delta t, \quad \vartheta_2 = \omega_2 \Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Allora, se il rapporto di trasmissione è definito come $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$:

$$\tau = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{z_1}{z_2}$$

ossia il rapporto di trasmissione è definito dal rapporto tra il numero dei denti delle ruote.

Eppure è anche vero che, per il contatto di puro rotolamento, $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$ quindi

$$\tau = \frac{r_1}{r_2}$$

Come ricavare i raggi primitivi fissati il rapporto di trasmissione dal numero dei denti $\tau = \frac{z_1}{z_2}$ e l'interasse?

Vale che

$$\begin{cases} r_1 = \tau r_2 \\ r_1 + r_2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \tau r_2 \\ \tau r_2 + r_2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{\tau a}{\tau + 1} \\ r_2 = \frac{a}{\tau + 1} \end{cases}$$

È inoltre vero dalla definizione di passo e dalle relazioni sul rapporto di trasmissione trovate che

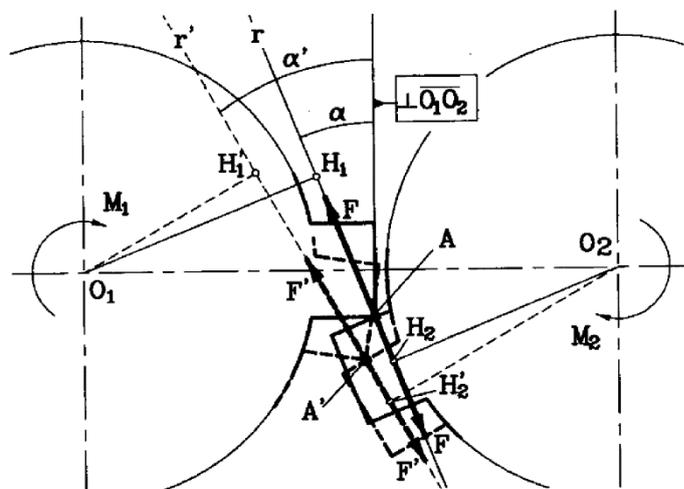
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{r_1/z_1}{r_2/z_2} = \frac{r_1/r_2}{z_1/z_2} = \frac{\tau}{\tau} = 1$$

ossia i passi delle ruote (e così per i moduli) devono essere uguali per garantire il corretto funzionamento.

È importante scegliere un profilo dei fianchi dei denti adatto a garantire

- rapporto di trasmissione costante e
- assenza di distacchi, urti o interferenze.

Si veda l'esempio degli ingranaggi a ruote rettangolari e si evinca il perché non vengono realizzati.



Se sulla ruota motrice si applica una coppia M_1 , in un primo istante lo spigolo di un dente di quest'ultima applica una forza F al fianco del dente della ruota condotta in direzione perpendicolare al fianco stesso (è questa la retta d'azione r , inclinata di α rispetto alla perpendicolare della congiungente dei centri delle ruote) cosicché, se $\overline{O_1H_1}$ ed $\overline{O_2H_2}$ sono le distanze centro- r , la forza scambiata vale

$$F = \frac{M_1}{\overline{O_1H_1}}$$

oppure, se M_2 è il momento resistente,

$$F = \frac{M_2}{\overline{O_2H_2}}$$

Nell'istante successivo, tuttavia, cambia l'inclinazione della retta d'azione e quindi si modificano anche i valori delle distanze di questa dai centri delle ruote in $\overline{O_1H_1'}$ e $\overline{O_2H_2'}$ cosicché la forza scambiata F' (in generale diversa) sia ora, se il momento motore è sempre M_1 e quello resistente, in generale diverso, è M_2' :

$$F' = \frac{M_1}{O_1H_1'} = \frac{M_2'}{O_2H_2'}$$

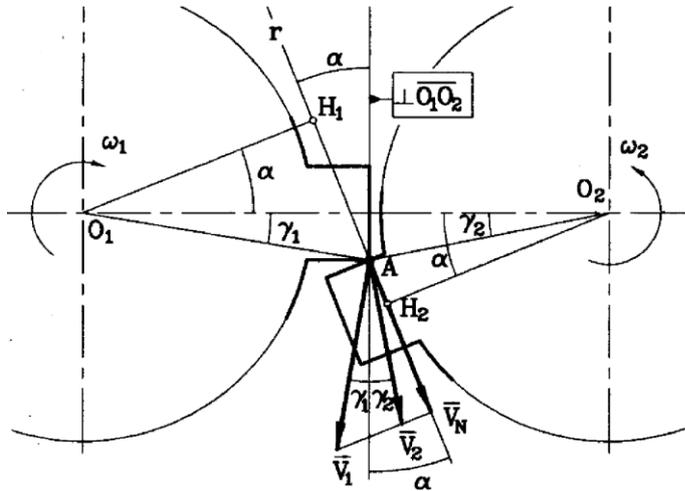
Quindi

$$M_2 \frac{O_1H_1}{O_2H_2} = M_2' \frac{O_1H_1'}{O_2H_2'}$$

Siccome $\frac{O_1H_1'}{O_2H_2'} < \frac{O_1H_1}{O_2H_2}$

$$M_2 < M_2'$$

cioè il momento sulla ruota condotta non è costante nonostante sia costante quello sulla ruota motrice.



Nel punto di contatto A per la formula fondamentale della cinematica la velocità del punto secondo la ruota motrice è (in modulo)

$$v_1 = \omega_1 \overline{O_1A}$$

e ha direzione perpendicolare a $\overline{O_1A}$, mentre quella secondo la ruota condotta è (in modulo)

$$v_2 = \omega_2 \overline{O_2A}$$

e ha direzione perpendicolare a $\overline{O_2A}$.

Per garantire assenza di urto o distacco, v_1 e v_2 devono avere stessa componente normale al fianco del dente della condotta (quindi la proiezione sulla retta d'azione r , inclinata di α rispetto alla perpendicolare della congiungente dei centri delle ruote $\overline{O_1O_2}$).

Semplici considerazioni geometriche portano ad affermare che

- se $\overline{O_1A}$ è inclinato di γ_1 sotto a $\overline{O_1O_2}$, siccome \vec{v}_1 è perpendicolare a $\overline{O_1A}$, tale velocità è anche inclinata di γ_1 a destra della perpendicolare a $\overline{O_1O_2}$ e
- se $\overline{O_2A}$ è inclinato di γ_2 sotto a $\overline{O_1O_2}$, siccome \vec{v}_2 è perpendicolare a $\overline{O_2A}$, tale velocità è anche inclinata di γ_2 a sinistra della perpendicolare a $\overline{O_1O_2}$.

Così si avrà che le proiezioni su r sono

$$v_{1,N} = v_1 \cos(\alpha + \gamma_1) = \omega_1 \overline{O_1A} \cos(\alpha + \gamma_1)$$

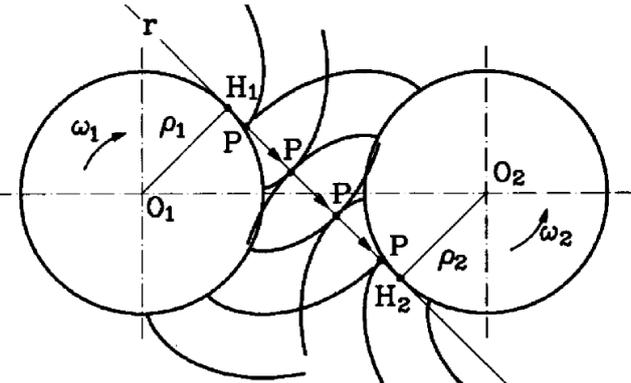
$$v_{2,N} = v_2 \cos(\alpha - \gamma_2) = \omega_2 \overline{O_2A} \cos(\alpha - \gamma_2)$$

Poiché dev'essere $v_{1,N} = v_{2,N}$ e ci accorgiamo che $\overline{O_1A} \cos(\alpha + \gamma_1) = \overline{O_1H_1}$ e $\overline{O_2A} \cos(\alpha - \gamma_2) = \overline{O_2H_2}$ si vede che

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{O_1H_1}{O_2H_2}$$

Se – come dalle considerazioni sui momenti – si vede che in un istante successivo $\frac{O_1H_1'}{O_2H_2'} < \frac{O_1H_1}{O_2H_2}$, allora il rapporto di trasmissione non è costante.

Il profilo più usato per i fianchi dei denti di un ingranaggio (esistono anche ruote con profilo a cicloide) è quello a evolvente di cerchio (curva ottenuta facendo rotolare senza strisciamento una semiretta su una circonferenza – detta base o fondamentale – e tracciando, a partire da quando si trova su suddetta circonferenza, lo spostamento della sua origine).

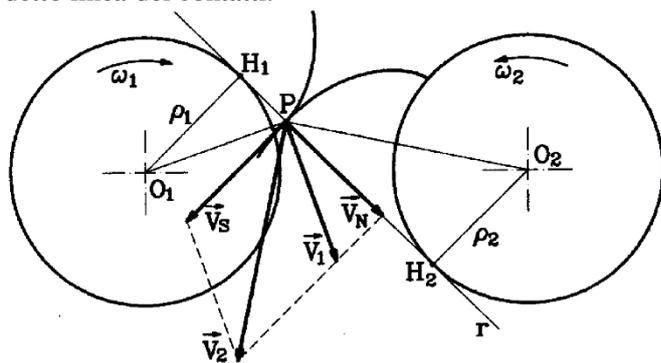


Se si immagina di far ruotare due circonferenze base dalle quali partono delle evolventi opportunamente scelte perché sia tangente quella di una circonferenza con quella dell'altra, si vede che, essendo le due evolventi coniugate (stessa normale nel punto di contatto) ed essendo – per proprietà dell'evolvente – la retta normale all'evolvente sempre tangente alla circonferenza base, la retta d'azione è obbligatoriamente tangente a entrambe le circonferenze base e tale rimane per tutto il moto. Infatti per il punto di

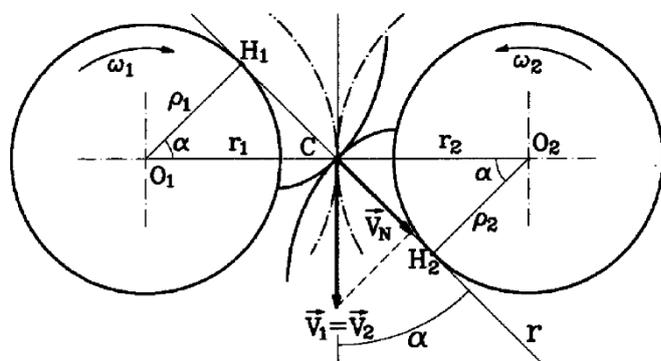
contatto all'istante successivo la retta d'azione è sempre tangente alle circonferenze base e dev'essere la stessa dell'istante precedente per la proprietà di unicità di una retta tangente a due circonferenze (N.B. in realtà le rette tangenti a due circonferenze e passanti per un punto appartenente alla congiungente dei centri sono sempre due – comunque sia dotate di simmetria pari rispetto a suddetta congiungente – ma di queste scartiamo quella che priverebbe della continuità: non è infatti possibile che l'inclinazione della tangente “salti” dall'essere una all'altra rimanendo le evolventi le stesse da un istante all'altro). È questo un primo motivo per cui il profilo a evolvente è vantaggioso, infatti la permanenza della configurazione della retta d'azione è ciò che permette di avere rapporto di trasmissione costante poiché:

- dal punto di vista dinamico, non cambia la direzione della forza di contatto, quindi nemmeno il momento trasmesso;
- dal punto di vista cinematico, non cambiando il rapporto $\frac{O_1H_1}{O_2H_2}$, non cambia nemmeno il rapporto tra le velocità angolari (vedi al contrario la cinematica delle ruote a denti rettangolari).

Il segmento della retta d'azione che va dal punto tangente a una circonferenza a quello tangente all'altra è detto linea dei contatti.



è allora tangente a entrambi i profili a contatto e pertanto il centro d'istantanea rotazione relativo è sulla retta d'azione (costruzione di Chasles).

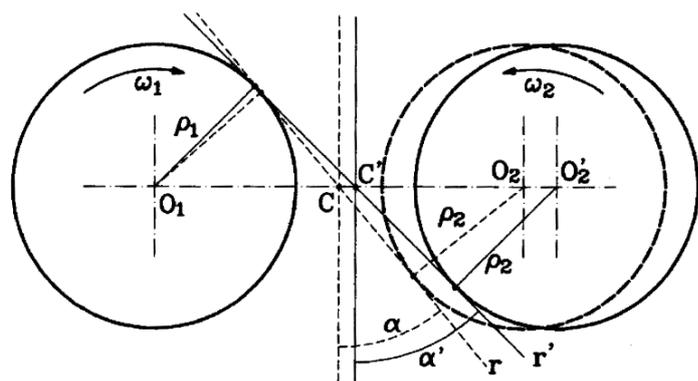


funzionamento). Tuttavia, definito l'angolo di pressione α come quello tra la retta d'azione e la perpendicolare a O_1O_2 , si vede che

$$\rho_1 = r_1 \cos \alpha$$

$$\rho_2 = r_2 \cos \alpha$$

(dove ρ_1 e ρ_2 sono i raggi delle circonferenze base). Ma allora $\tau = \frac{\rho_1}{\rho_2}$, cioè il rapporto di trasmissione è allora fissato dal rapporto tra i raggi delle circonferenze base.



Tra i fianchi dei denti di un ingranaggio con ruote a profilo a evolvente c'è strisciamento. Infatti in un punto di contatto P generico i vettori $\overline{O_1P}$ e $\overline{O_2P}$ formano tra loro un angolo, cosa che fa sì che quello tra \vec{v}_1 e \vec{v}_2 sia suo supplementare (relazione fondamentale della cinematica). Eppure, per evitare distacchi e urti, la componente normale della velocità di \vec{v}_1 e \vec{v}_2 (quindi la loro proiezione sulla retta d'azione) dev'essere la stessa: la velocità di strisciamento

è allora tangente a entrambi i profili a contatto e pertanto il centro d'istantanea rotazione relativo è sulla retta d'azione (costruzione di Chasles). Dov'è tuttavia di preciso il centro d'istantanea rotazione relativo? È dove $\vec{v}_s = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 0$, (oppure dove $\vec{v}_2 = \vec{v}_1$). Se il punto di contatto si trova sulla congiungente dei centri, \vec{v}_1 e \vec{v}_2 devono essere paralleli e, siccome devono avere stessa proiezione su r , sono anche di ugual modulo. Allora qui $\vec{v}_s = 0$, cioè ci troviamo nel c.i.r. relativo.

Se $v_1 = v_2$, vale anche che $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$ (dove r_1 ed r_2 sono i raggi delle primitive di

funzionamento).

Tuttavia, definito l'angolo di pressione α come quello tra la retta d'azione e la perpendicolare a O_1O_2 , si vede che

$$\rho_1 = r_1 \cos \alpha$$

$$\rho_2 = r_2 \cos \alpha$$

(dove ρ_1 e ρ_2 sono i raggi delle circonferenze base). Ma allora $\tau = \frac{\rho_1}{\rho_2}$, cioè il rapporto di trasmissione è allora fissato dal rapporto tra i raggi delle circonferenze base.

Il rapporto di trasmissione non cambia allora al variare dell'interasse, ma cambiano i raggi primitivi e l'angolo di pressione.

Se infatti scelgo due configurazioni con diverso interasse, noto che per la prima

$$\tau = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\rho_1 / \cos \alpha}{\rho_2 / \cos \alpha} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

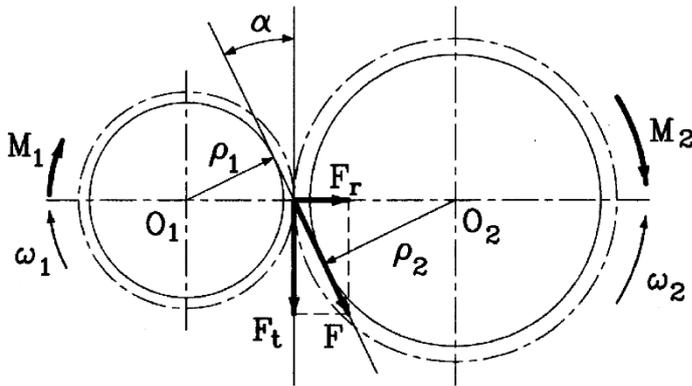
mentre per la seconda

$$\tau' = \frac{r'_1}{r'_2} = \frac{\rho_1 / \cos \alpha'}{\rho_2 / \cos \alpha'} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Quindi $\tau = \tau'$.

Se il raggio della circonferenza base tende all'infinito, essa tende a una retta base e l'evolvente che se ne ricava degenera in una retta. Così una dentiera sarà da considerare una ruota dentata limite e avrà denti con profilo a segmento di retta. Se accoppiata con una ruota di egual modulo, i fianchi dei denti sono ancora superfici coniugate con retta d'azione normale al profilo della dentiera (e angolo di pressione di conseguenza). Non ha più senso definire un rapporto di trasmissione, ma vale comunque il vincolo di puro rotolamento tra le primitive di funzionamento

$$v_2 = \omega_1 r_1$$



Contrassegiamo il momento sulla ruota condotta come "ideale" perché in realtà, a causa della perdita di potenza che di sperimenta per via dell'attrito, definito il rendimento $\eta = \frac{W_{out}}{W_{in}} = \frac{M_2 \omega_2}{M_1 \omega_1}$, varrà

$$M_2 = \eta M_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} = \eta r_1 F \cos \alpha \frac{r_2}{r_1} = \eta r_2 F \cos \alpha = \eta M_2^{id}$$

La potenza $W_{diss} = (1 - \eta) M_2^{id} \omega_2$, se ingente, richiederà un'attenta progettazione per lo smaltimento del calore. Notiamo inoltre che nell'ingranamento di due ruote a denti dritti gli alberi su cui sono calettate ricevono una spinta radiale.

La forza F scambiata tra due ruote a denti elicoidali, dovendo essere normale al fianco del dente ed essendo questo inclinato di β rispetto all'asse, ha componenti assiale, tangenziale e radiale scomposte come intuibile da semplici considerazioni geometriche

$$F_a = F \sin \beta$$

$$F_t = F_0 \cos \alpha = F \cos \beta \cos \alpha$$

$$F_r = F_0 \sin \alpha = F \cos \beta \sin \alpha$$

Quanto detto per F nelle ruote a denti dritti si può dire ora per F_0 : possiamo

considerare il momento trasmesso o come prodotto del raggio di base per F_0 o come prodotto del raggio primitivo (di funzionamento) per la componente F_t di F_0 , tangenziale alla primitiva (di funzionamento). In entrambi i casi

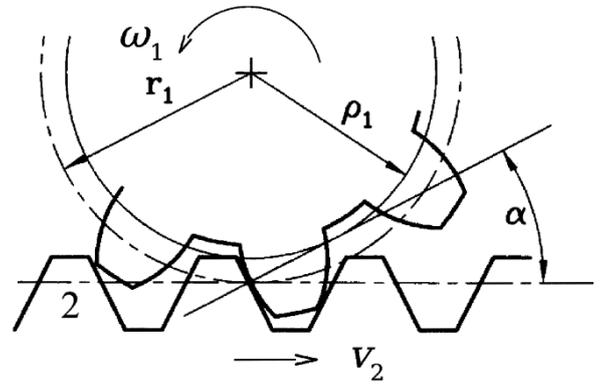
$$M_1 = \rho_1 F_0 = r_1 F_0 \cos \alpha = r_1 F \cos \beta \cos \alpha$$

$$M_2^{id} = \rho_2 F_0 = r_2 F_0 \cos \alpha = r_2 F \cos \beta \cos \alpha$$

Contrassegiamo il momento sulla ruota condotta come "ideale" perché in realtà, a causa della perdita di potenza che di sperimenta per via dell'attrito, definito il rendimento $\eta = \frac{W_{out}}{W_{in}} = \frac{M_2 \omega_2}{M_1 \omega_1}$, varrà

$$M_2 = \eta M_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} = \eta r_1 F \cos \beta \cos \alpha \frac{r_2}{r_1} = \eta r_2 F \cos \beta \cos \alpha = \eta M_2^{id}$$

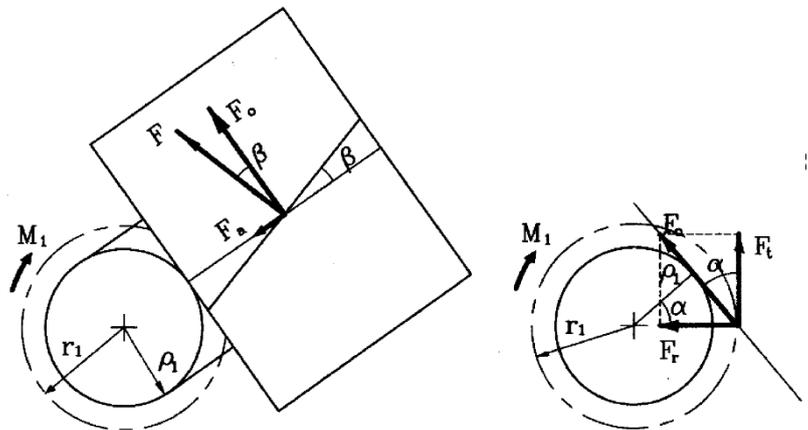
Le ruote a denti elicoidali sono più silenziose e in grado di trasportare potenze maggiori ma meno efficienti. In più, richiedono che sia equilibrata la spinta assiale F_a che forniscono all'albero.

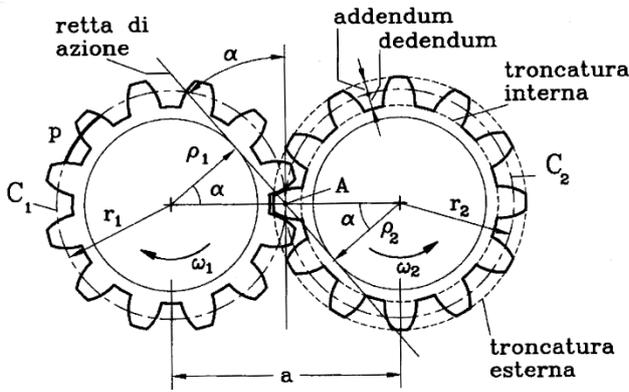


La forza F scambiata da due ruote cilindriche a denti dritti è lungo la retta d'azione e non ha componente assiale, quindi possiamo considerare il momento trasmesso o come prodotto del raggio di base per l'intera forza o come prodotto del raggio primitivo (di funzionamento) per la componente F_t di F , tangenziale alla primitiva (di funzionamento). In entrambi i casi

$$M_1 = \rho_1 F = r_1 F \cos \alpha$$

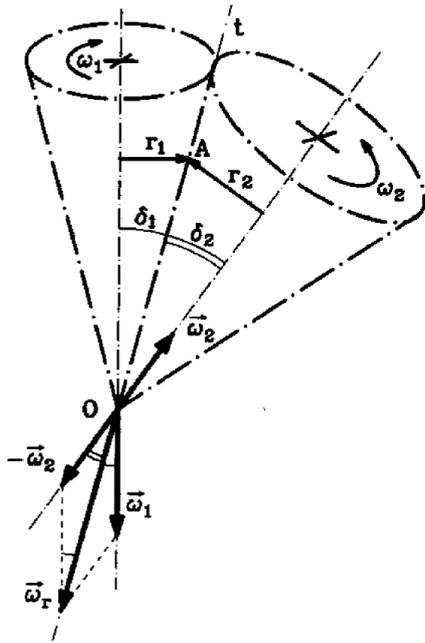
$$M_2^{id} = \rho_2 F = r_2 F \cos \alpha$$





Le ruote si dimensionano in maniera modulare: presi il modulo $m = \frac{p}{\pi}$ e una primitiva di riferimento, l'addendum – ossia la differenza tra il raggio della troncatura esterna e il raggio della primitiva – si prende uguale a m ; il dedendum – ossia la differenza tra il raggio della primitiva e il raggio della troncatura interna – si prende uguale a $\frac{5}{4}m$. Il dedendum dev'essere infatti maggiore dell'addendum per evitare interferenze durante il funzionamento.

Tutte le ruote aventi stesso modulo e stesso dimensionamento modulare possono essere ingranate tra loro.



Si immagina di sostituire le ruote coniche con le loro primitive di funzionamento, ossia due coni di semiapertura δ_1 e δ_2 con stesso vertice O che ruotano attorno al proprio asse con velocità angolare $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ (vettori orientati per l'appunto come l'asse di rotazione). La velocità relativa è pertanto

$$\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$$

di modulo (per il teorema del coseno)

$$\omega_r = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos(\delta_1 + \delta_2)}$$

e diretta come t .

Per il vincolo di puro rotolamento, vale in un qualsiasi punto A di t :

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

dove r_1 ed r_2 possono essere visti come

$$r_1 = a \sin \delta_1$$

$$r_2 = a \sin \delta_2$$

con a – grandezza uguale per entrambi i coni – la distanza di O dal punto dove è preso il raggio. Allora

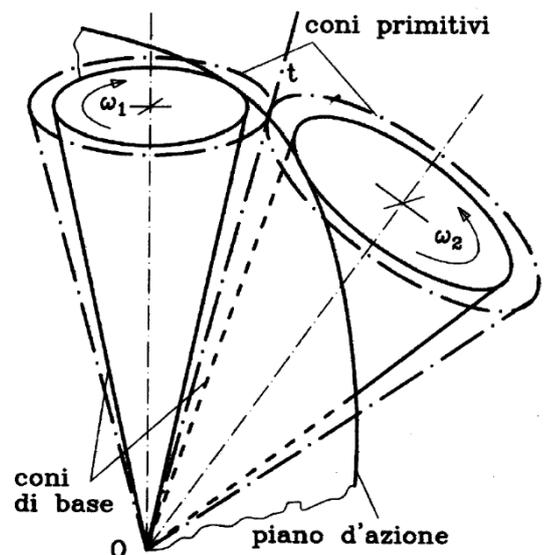
$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2}$$

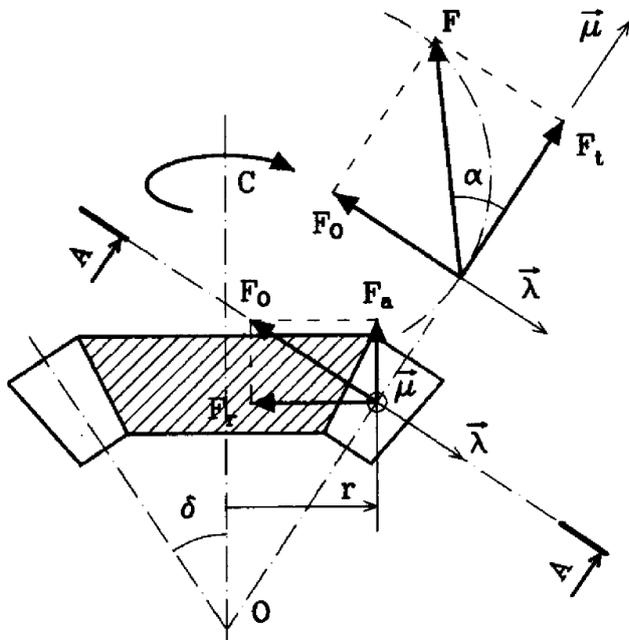
Pertanto, fornito l'angolo tra gli assi concorrenti e scelto di ripartirlo in δ_1 e δ_2 , si sceglie il numero di denti di conseguenza ricordando che $\tau = \frac{z_1}{z_2}$.

Se i coni primitivi di funzionamento sono le superfici coniugate che immaginiamo rotolare senza strisciamento, il profilo a evolvente di cerchio dei denti presuppone la presenza di due coni di base coassiali coi primitivi aventi un piano tangente a entrambi, detto piano d'azione, che contiene le forze scambiate e – di conseguenza – di un angolo di pressione tra il piano d'azione e il comune piano tangente ai coni primitivi.

I profili a evolvente saranno poi limitati esternamente e internamente, determinando la presenza di altri coni coassiali a quelli già esistenti, ossia uno di troncatura esterna e uno di troncatura interna. Vero è poi anche che le ruote non hanno forma conica, bensì troncoconica, quindi si prende una sola porzione dei coni di cui sopra.

Si fa presente inoltre che per la determinazione del modulo si fa riferimento al raggio della base maggiore del tronco di cono.





Per quanto riguarda la dinamica, si vede come la forza di contatto F abbia componenti assiale, radiale e tangenziale, di cui solo l'ultima efficace per la trasmissione del momento. Essendo F sul piano d'azione, può essere scomposta in una componente F_t tangenziale ai coni primitivi (direzione $\vec{\mu}$) e una F_o loro normale (direzione $\vec{\lambda}$). Quest'ultima può essere poi scomposta in direzione assiale e radiale rispettivamente in F_a ed F_r . Così si avrà, se α è angolo di pressione e δ la semiapertura del cono primitivo:

$$\begin{aligned} F_t &= F \cos \alpha \\ F_a &= F \sin \alpha \sin \delta \\ F_r &= F \sin \alpha \cos \delta \end{aligned}$$

La coppia applicata è pertanto

$$C = rF_t = rF \cos \alpha$$

19) Rotismi

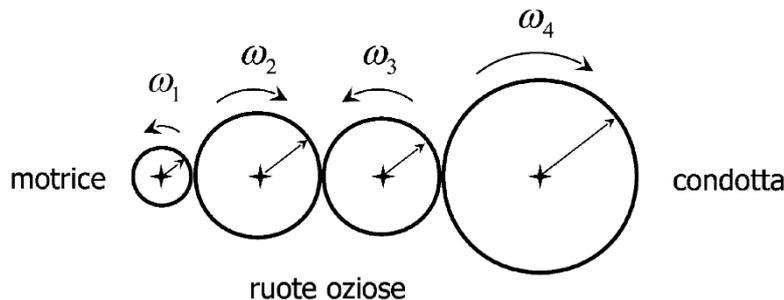
Descrivere i rotismi secondo le seguenti indicazioni:

- classificare i rotismi;
- mostrare la cinematica dei rotismi ordinari semplici e composti;
- la ruota elicoidale e vite senza fine;
- per i rotismi epicicloidali fornire una descrizione generale e le caratteristiche, trattando le morfologie semplice e composte e mettendo in evidenza
 - lo schema costruttivo e le varie tipologie di impiego,
 - la formula di Willis e i rapporti di trasmissione e
 - le condizioni per l'impiego come riduttori o moltiplicatori.

I rotismi sono un insieme di due o più ingranaggi che costituisce una catena cinematica. Si classificano in base alla posizione relativa degli assi in

- piani, se tutti gli assi sono paralleli o
- sferici, se tutti gli assi sono incidenti in un punto.

Si classificano poi in rotismi ordinari, se tutti gli assi sono fissi durante la trasmissione di potenza, o epicicloidali, se qualcuno degli assi si muove. Sono, in ultimo, classificati in semplici se su ogni albero è calettata una sola ruota o composti al contrario.



Un rotismo come quello in figura (sono rappresentate le primitive di funzionamento) è ordinario e semplice. Vi si distinguono la prima e l'ultima ruota, rispettivamente la motrice e la condotta, e le altre, dette oziose perché non partecipano alla determinazione del rapporto di trasmissione. Infatti dev'essere che la

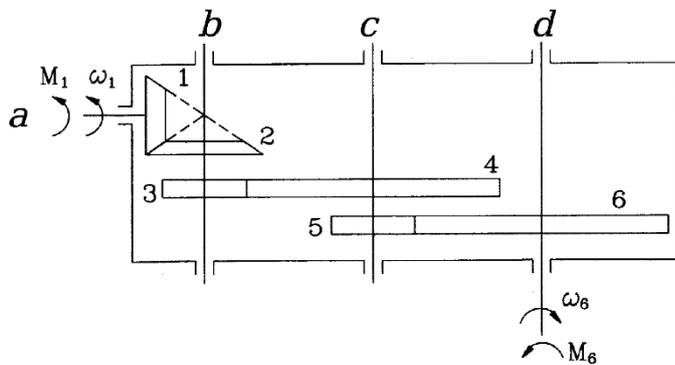
velocità periferica (quindi sulla primitiva) di ogni ruota sia costante, cioè per n ruote:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = \dots = \omega_n r_n$$

Così, siccome il rapporto di trasmissione è solo definito da velocità angolare in uscita dalla trasmissione / velocità angolare in entrata, semplicemente

$$\tau = \frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_n} = \frac{z_1}{z_n}$$

Perché dunque aggiungere ruote se non partecipano a τ ? Potrebbe ad esempio essere necessario che le velocità angolari di motrice e condotta debbano avere lo stesso verso, quindi si aggiungeranno ruote oziose in numero dispari, oppure che la distanza tra gli assi motore e condotto sia grande, indi per cui si aggiungono ruote intermedie.



Nel rotismo in figura, classificato come ordinario e composto, si definiscono tre rapporti di trasmissione (tanti quanti sono gli ingranaggi):

$$\tau_{1/2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$\tau_{3/4} = \frac{\omega_4}{\omega_3}$$

$$\tau_{5/6} = \frac{\omega_6}{\omega_5}$$

Eppure le coppie di ruote 2-3 e 4-5, essendo calettate sullo stesso albero, hanno stessa

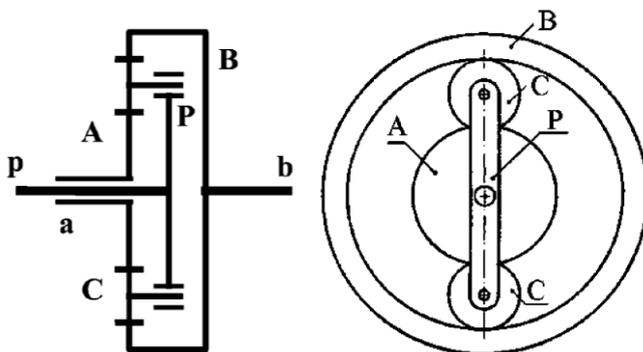
velocità angolare ($\omega_2 = \omega_3$ e $\omega_4 = \omega_5$). Allora:

$$\tau_{1/6} = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{\tau_{5/6}\omega_5}{\omega_2/\tau_{1/2}} = \tau_{1/2}\tau_{5/6}\frac{\omega_4}{\omega_3} = \tau_{1/2}\tau_{3/4}\tau_{5/6} = \frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{\omega_4}{\omega_3}\frac{\omega_6}{\omega_5} = \frac{z_1z_3z_5}{z_2z_4z_6}$$

Generalizzando, se per ciascun ingranaggio z_i sono i denti delle ruote motrici e z_j quelli delle ruote condotte:

$$\tau = \frac{\prod_i z_i}{\prod_j z_j}$$

La coppia ruota elicoidale-vite senza fine è usata per trasmettere il moto tra assi sghembi in direzioni ortogonali, riuscendo a dar vita a rapporti di trasmissione notevoli (anche 0.01) ma con rendimenti bassi (intorno a 0.5) ed elevata usura. In particolare τ è definito dal rapporto tra il numero dei principi della vite senza fine e il numero dei denti della ruota. Un pregio di questo tipo di trasmissione è che permette il flusso di potenza in un solo verso, ossia quello diretto dalla vite alla ruota.



In figura vi è il rotismo epicicloidale semplice, in comunicazione con l'esterno tramite gli assi a , su cui è calettata la ruota A (detta ruota solare), b , solidale alla corona B , e p . Tra la ruota solare e la corona ci può essere un numero imprecisato (qui due) di ruote planetarie, ingranate sia con l'una che con l'altra ma aventi assi mobili la cui rotazione è raccolta dal portatreno P calettato sul sopra citato asse p .

A seconda del moto di portatreno, corona e ruota solare, si classifica il rotismo in:

- ordinario, se P è fisso (infatti gli assi sono ora tutti fissi);
- epicicloidale riduttore o moltiplicatore, se A o B sono fissi;
- combinatore, se A , B o P sono tutti mobili.

Per la formulazione del rapporto di trasmissione in un rotismo epicicloidale si ricorre al metodo di Willis. Notiamo innanzitutto che, essendo che se P è fermo il rotismo è ordinario, il rapporto di trasmissione ordinario è

$$\tau_o = \frac{\omega_B^o}{\omega_A^o} = -\frac{r_A}{r_B} = -\frac{z_A}{z_B}$$

negativo perché ω_A^o e ω_B^o sono antiparallele.

Eppure il rapporto di trasmissione ordinario dev'essere indipendente dal sistema di riferimento quindi, se P avesse velocità angolare ω_P , potremmo osservare il moto in maniera solidale al portatreno – che in questo sistema sarebbe fisso – rendendo così il rotismo ordinario. Il rapporto di trasmissione ordinario è sempre

$\tau_o = \frac{\omega_B^o}{\omega_A^o}$, ma le velocità di ruota solare e corona – in un sistema fisso ω_A e ω_B – sono nel nuovo sistema

$$\omega_A^o = \omega_A - \omega_P$$

$$\omega_B^o = \omega_B - \omega_P$$

Così si ottiene la formula di Willis

$$\tau_o = \frac{\omega_B - \omega_P}{\omega_A - \omega_P}$$

Così, fissato τ_o dal numero dei denti di A e B , si trovano i rapporti di trasmissione desiderati combinando le opportune velocità angolari.

Ad esempio, se A fosse fissa, avrei che la formula di Willis sarebbe

$$\tau_o = -\frac{\omega_B - \omega_P}{\omega_P}$$

e, se fosse P motore e B condotta, avrei

$$\tau_o = -\frac{\omega_B}{\omega_P} + 1 \Rightarrow \tau = \frac{\omega_B}{\omega_P} = 1 - \tau_o$$

mentre al contrario avrei

$$\tau' = \frac{\omega_P}{\omega_B} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{1 - \tau_o}$$

Se invece B fosse fissa, Willis diverrebbe

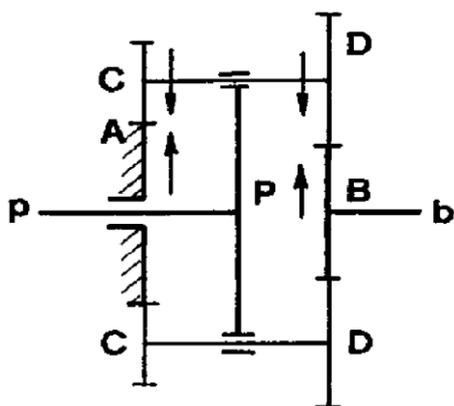
$$\tau_o = -\frac{\omega_P}{\omega_A - \omega_P}$$

e allora, con P motore e A condotta, si avrebbe

$$\frac{\omega_A - \omega_P}{\omega_P} = -\frac{1}{\tau_o} \Rightarrow \tau = \frac{\omega_A}{\omega_P} = 1 - \frac{1}{\tau_o} = \frac{\tau_o - 1}{\tau_o}$$

mentre, viceversa,

$$\tau' = \frac{\omega_P}{\omega_A} = \frac{1}{\tau} = \frac{\tau_o}{\tau_o - 1}$$



Se, come in figura, su un albero sono calettate più ruote, il rotismo epicicloidale è composto. Per calcolare il rapporto di trasmissione ricorriamo sempre al metodo di Willis, ossia calcoliamo dapprima il rapporto di trasmissione ordinario (con portatreno fisso) che, essendo il rotismo composto, è

$$\tau_o = \frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{z_A z_D}{z_C z_B}$$

(stavolta positivo perché A e B ruotano nello stesso verso).

Fissato questo, ci si pone in un sistema di riferimento solidale col portatreno e si può allora scrivere che

$$\tau_o = \frac{\omega_B - \omega_P}{\omega_A - \omega_P}$$

Ancora una volta, se A è fisso Willis diventa

$$\tau_o = -\frac{\omega_B - \omega_P}{\omega_P}$$

e avremo:

- $\tau = 1 - \tau_o$ se P è motore e B è condotta o
- $\tau' = \frac{1}{1 - \tau_o}$ viceversa.

Se invece a essere fisso è B , ho

$$\tau_o = -\frac{\omega_P}{\omega_A - \omega_P}$$

e di conseguenza:

- $\tau = \frac{\tau_o - 1}{\tau_o}$ se P è motore e A è condotta o
- $\tau' = \frac{\tau_o}{\tau_o - 1}$ viceversa.

Con rotismi epicicloidali si riescono a ottenere rapporti di trasmissione notevoli pur essendo τ_o molto vicino a 1. Ad esempio, se $z_A = 99$, $z_C = 101$, $z_D = 100$ e $z_B = 100$, si vede che $\tau_o \approx 0.98$ e un rotismo con A fisso avrebbe rapporti di trasmissione:

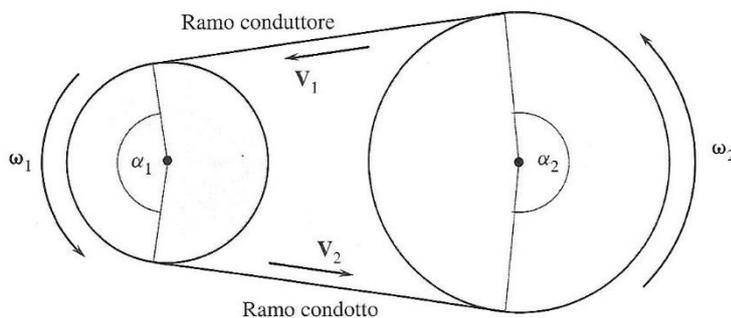
- $\tau \approx 0.02$ (riduttore) con P motore
- $\tau \approx 50$ (moltiplicatore) con B motore.

20) Cinghie, catene e funi

Descrivere per le trasmissioni con flessibili:

- i campi di impiego e il funzionamento generale;
- le caratteristiche delle cinghie piane, trapezoidali e dentate, nonché la cinematica della trasmissione e i metodi per aumentare la potenza trasmissibile;
- nel caso di cinghie piane, le reazioni di contatto con la puleggia, le relazioni dinamiche tra le tensioni dei due rami, la potenza trasmissibile e la verifica del funzionamento;
- nel caso di cinghie trapezoidali, le relazioni di equivalenza delle azioni di contatto e il coefficiente di attrito equivalente;
- il funzionamento delle cinghie dentate;
- descrizione generale e campi di impiego delle catene a rulli e a denti invertiti, descrizione della cinematica di funzionamento e degli inconvenienti legati all'effetto poligono,
- descrizione della cinematica e dinamica del paranco multiplo.

Si usano trasmissioni con elementi flessibili per trasmettere il moto tra alberi paralleli (al più leggermente sghembi) anche molto distanti tra loro. L'elemento flessibile è avvolto attorno a due pulegge e pretensionato in modo che quella motrice lo trascini per attrito o spinte normali; a sua volta questo, sempre grazie ad azioni di attrito o normali, trascinerà con sé la puleggia condotta e ho così trasmesso la potenza.



I punti in cui il flessibile perde il contatto con ciascuna puleggia definiscono degli angoli al centro, detti angoli di avvolgimento. Si vede poi che le tensioni del flessibile tra i due rami tesi non sono uguali e, in particolare, troviamo la maggiore sul ramo conduttore – ossia quello trascinato dalla ruota motrice (il superiore nella figura) – e la minore sul

ramo condotto – ossia quello “di ritorno” trascinato dalla ruota condotta (quello inferiore in figura) poiché il tiro viene aumentato gradualmente durante l’arco di avvolgimento della ruota motrice.

Esistono cinghie piane, la cui sezione è rettangolare e che scambiano forze d’attrito sul lato più largo, cinghie trapezoidali, di sezione appunto trapezoidale, che scambiano forze d’attrito sui fianchi laterali, e cinghie dentate, che funzionano per spinte normali tra i denti della catena – dei quali è ora dotata – e i denti delle pulegge – dei quali sono ora dotate, rendendole delle ruote dentate. Tutti e tre i tipi garantiscono trasmissioni tra alberi a grande distanza, silenziose, capaci di lavorare a grandi velocità e di assorbire eventuali urti. Le prime due hanno anche il vantaggio/svantaggio dell’autolimitazione della potenza, dovuto alla mancata adempienza al limite di attrito statico quando la forza tangenziale da trasmettere diventa troppo grande, insieme allo svantaggio – a volte ignorabile, a volte no – di non poter garantire un rapporto di trasmissione costante. La cinghia dentata ovvia a entrambi questi problemi.

Per permettere alla trasmissione di farsi carico di potenze maggiori in generale è possibile:

- per la cinghia piana, allargarla per permettere maggiore pretensionamento o
- per la cinghia trapezoidale, metterne più d’una in parallelo.

Il costo di questi tipi di cinghie è in genere contenuto, ma la loro vita è limitata e richiedono la sostituzione una volta esauritasi.

Per quanto riguarda la cinematica, è facile comprendere come le velocità periferiche delle due pulegge debbano essere uguali durante il moto, così da poter scrivere che

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

Allora

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

Occorre tuttavia precisare che nella realtà non è propriamente valido il modello di attrito statico tra puleggia e cinghia, bensì quello dei micro-scorrimenti a causa dei quali sulla puleggia condotta si avrà una velocità minore (il massimo scarto accettabile è del 3%).

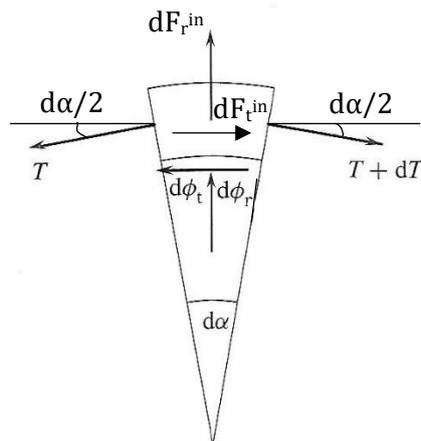
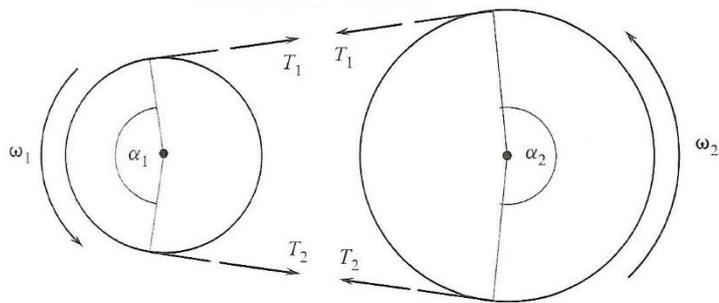
Si poteva arrivare all'espressione del rapporto di trasmissione anche da considerazioni dinamiche. Il bilancio sulle due pulegge restituisce infatti che i valori delle coppie C_1 e C_2 motrice e resistente sono

$$C_1 = r_1(T_1 - T_2) \quad (1a)$$

$$C_2 = r_2(T_1 - T_2) \quad (1b)$$

Così

$$\tau = \frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2}$$



Nel caso di cinghia piana, si vede che su questa compaiono una reazione radiale e una tangenziale fornite dalla puleggia. Appliciamo il bilancio su un elemento infinitesimo di cinghia incluso in una porzione infinitesima $d\alpha$ dell'angolo di avvolgimento. Su di questo agiscono:

- le sopra citate reazioni dalla puleggia $d\phi_t$ e $d\phi_r$,
- il tiro, avente valore generico T dal lato dove è diretta la velocità e $T + dT$ dall'altro,
- la forza di inerzia tangenziale $dF_t^{in} = \dot{v} dm$, in realtà trascurabile perché piccola la massa e
- la forza di inerzia radiale $dF_r^{in} = \omega^2 r dm$ la quale, se si introduce una densità lineare $\rho_l = \frac{dm}{ds}$ (con $ds = r d\alpha$ ascissa curvilinea della cinghia), si scrive anche $dF_r^{in} = \rho_l \omega^2 r^2 d\alpha = \rho_l v^2 d\alpha$.

Pertanto:

$$\begin{cases} d\phi_r + \rho_l v^2 d\alpha - T \sin \frac{d\alpha}{2} - (T + dT) \sin \frac{d\alpha}{2} = 0 \\ (T + dT) \cos \frac{d\alpha}{2} + \dot{v} dm - d\phi_t - T \cos \frac{d\alpha}{2} = 0 \end{cases}$$

Se si ricorda che

- $\sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$,
- $\cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1$ e
- $dT \frac{d\alpha}{2} \approx 0$ perché infinitesimo di secondo ordine,

le relazioni diventano

$$\begin{cases} d\phi_r = T d\alpha - \rho_l v^2 d\alpha \\ d\phi_t = dT \end{cases}$$

Deve valere la condizione di attrito statico, alla quale applichiamo anche un coefficiente di sicurezza X :

$$d\phi_t \leq X f_s d\phi_r = f_{piana}^{eq} d\phi_r$$

Volendo studiare la condizione limite, poniamo $d\phi_t = f_{piana}^{eq} d\phi_r$ e quindi per le equazioni di bilancio

$$dT = f_{piana}^{eq} (T - \rho_l v^2) d\alpha$$

Una relazione che lega i tiri T_2 del ramo condotto e T_1 del ramo conduttore è quindi, integrando con $\tilde{\alpha}$ come ampiezza totale dell'angolo di avvolgimento

$$\begin{aligned} \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{(T - \rho_l v^2)} &= \int_0^{\tilde{\alpha}} f_{piana}^{eq} d\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \frac{T_1 - \rho_l v^2}{T_2 - \rho_l v^2} &= f_{piana}^{eq} \tilde{\alpha} \Rightarrow \\ \Rightarrow T_1 &= \rho_l v^2 + (T_2 - \rho_l v^2) e^{f_{piana}^{eq} \tilde{\alpha}} \Rightarrow \\ \Rightarrow T_1 &= T_2 e^{f_{piana}^{eq} \tilde{\alpha}} + \rho_l v^2 (1 - e^{f_{piana}^{eq} \tilde{\alpha}}) \quad (2) \end{aligned}$$

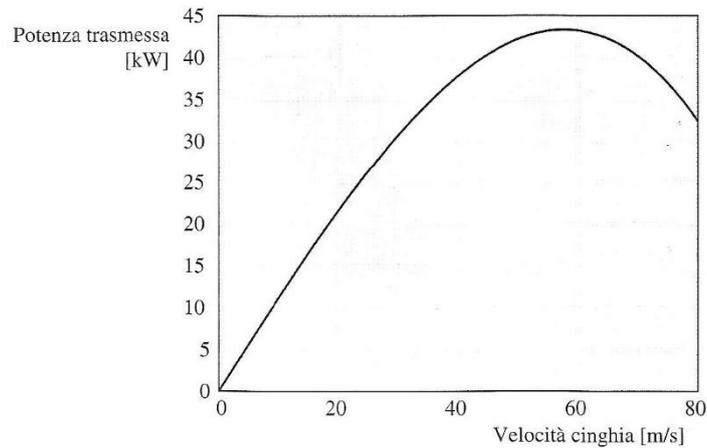
Qual è la potenza trasmissibile dalla cinghia?

Si vede facilmente che dev'essere

$$W_{tr} = C_1 \omega_1 = r_1 (T_2 - T_1) \omega_1 = \left[T_2 - T_2 e^{f_{piana}^{eq} \tilde{\alpha}} - \rho_l v^2 \left(1 - e^{f_{piana}^{eq} \tilde{\alpha}} \right) \right] v$$

$$= \left(1 - e^{f_{piana}^{eq} \tilde{\alpha}} \right) (T_2 - \rho_l v^2) v$$

Graficamente la funzione è:



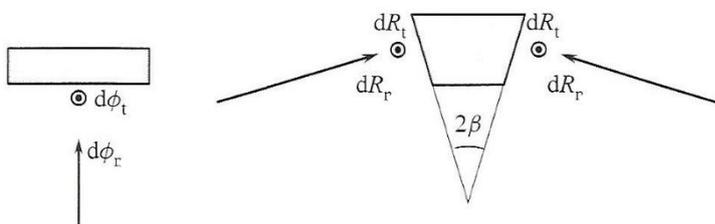
Le relazioni (1a) e (2) forniscono la coppia massima trasmissibile se si fissa T_1 o T_2 o a priori o fissando un parametro da cui una delle due dipende. Scegliamo la seconda via poiché notiamo che, se T_0 è il tiro a pulegge ferme, deve valere

$$2T_0 = T_1 + T_2 \quad (3)$$

ma il tiro T_0 è definito dalla reazione S_0 che si scarica sui vincoli degli assi degli alberi, che sarà il nostro parametro, secondo la relazione

$$S_0 = 2T_0 \cos \frac{\pi - \alpha_1}{2} \quad (4)$$

Il sistema delle equazioni (1a), (2), (3) e (4) fornisce la coppia massima trasmissibile in funzione di S_0 o, viceversa, il pretensionamento S_0 in funzione della prima.



Se la cinghia è trapezoidale, ci si riconduce a una cinghia piana equivalente, ossia con reazioni della puleggia

$$\begin{cases} d\phi_r = 2dR_r \sin \beta \\ d\phi_t = 2dR_t \end{cases}$$

Così, se il coefficiente d'attrito della cinghia trapezoidale è $f_{trap} = \frac{dR_t}{dR_r}$, ne

definisco uno per la cinghia piana a essa equivalente

$$f_{trap}^{eq} = \frac{d\phi_t}{d\phi_r} = \frac{2dR_t}{2dR_r \sin \beta} = \frac{f_{trap}}{\sin \beta}$$

Così si può ripetere la trattazione fatta per le cinghie piane.

Come già accennato, le cinghie dentate funzionano per spinte normali tra i denti dell'elemento flessibile e quelli della ruota, cosa che permette loro di trasmettere potenze più alte e mantenere la sincronia tra gli alberi, oltre che richiedere angoli di avvolgimento minori e non necessitare del pretensionamento (anche se un minimo viene applicato) che grava sui supporti. Ovviamente il rapporto di trasmissione è dato dal rapporto tra il numero dei denti delle ruote motrice e condotta:

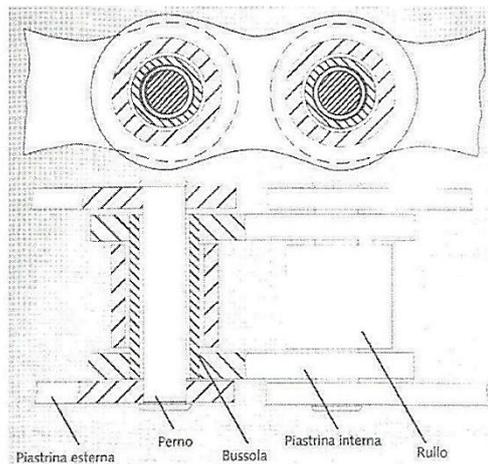
$$\tau = \frac{Z_1}{Z_2}$$

Le catene sono elementi flessibili composti in realtà da elementi rigidi, dette maglie, vincolati ma capaci di moto relativo. Permettono di trasmettere potenze più elevate delle cinghie, anche con interassi elevati (fino a 8 m) e con la possibilità di azionare più alberi ma sono generalmente più costose, richiedono più manutenzione e precisione di montaggio. Elevata nella trasmissione con catene è anche la rumorosità, che tra l'altro aumenta con la loro usura (causa, questa, anche di imprecisioni cinematiche).

I tipi di catena più usati sono:

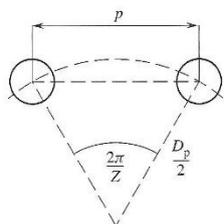
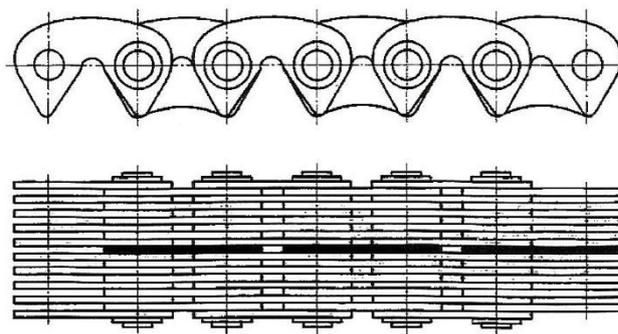
- la catena a rulli

Coppie di maglie interne collegate da boccole (o bussole) si articolano tramite perni passanti entro queste ultime con coppie di maglie esterne. Inoltre, liberi di ruotare attorno alle boccole, a distanziare le maglie interne ci sono dei rulli. La ruota dentata si ingrana dunque negli spazi tra un perno e un altro e trasmette il moto spingendo su questi. Si possono affiancare più file catene se si vuol trasmettere più potenza



- la catena a denti invertiti (o silenziosa)

Piastre dotate di due fori passanti e sagomate con due estremità triangolari sono disposte in maniera alternata (come in figura) e fissate da perni in modo da formare una “catena dentata”. I denti della ruota si ingranano tra i denti della catena e li spingono per trasmettere il moto. Una (quella centrale) o più file (equidistanziate) di piastre ne posseggono di diverse, piene dove nelle altre c'è il vuoto tra le due sporgenze triangolari, aventi la funzione di guida per evitare lo scalzamento della catena. Dev'essere ovviamente predisposta una ruota con una o più scanalature in grado di accogliere la guida.



Per entrambi i tipi la primitiva di funzionamento è la circonferenza passante per i perni, la distanza tra i quali è il passo p della catena. Semplici considerazioni geometriche portano a definire, se $\frac{2\pi}{z}$ è il passo angolare della ruota e D_p è il diametro primitivo, la relazione

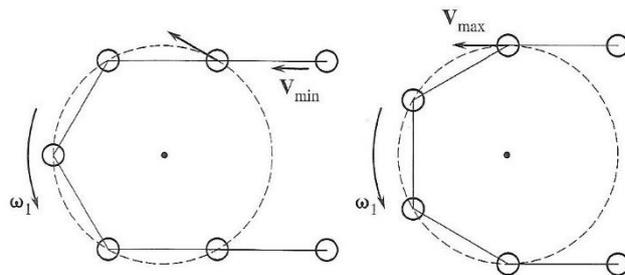
$$\frac{p}{2} = \frac{D_p}{2} \sin\left(\frac{1}{2} \frac{2\pi}{z}\right) \Rightarrow p = D_p \sin\frac{\pi}{z}$$

Le catene soffrono inoltre dell' “effetto poligono”, per il quale la velocità della catena fluttua tra un valore massimo e uno minimo. Nel caso di ruota con sei denti si vede come la proiezione della velocità tangenziale alla ruota sul tiro della catena non sia sempre la stessa, bensì oscilla tra

$$v_{min} = \frac{D_p}{2} \omega \cos\frac{\pi}{z}$$

e

$$v_{max} = \frac{D_p}{2} \omega$$



Si può definire la variazione di velocità con un indice adimensionale

$$u_{\%} = \frac{v_{max} - v_{min}}{v_{max}} = 1 - \cos\frac{\pi}{z}$$

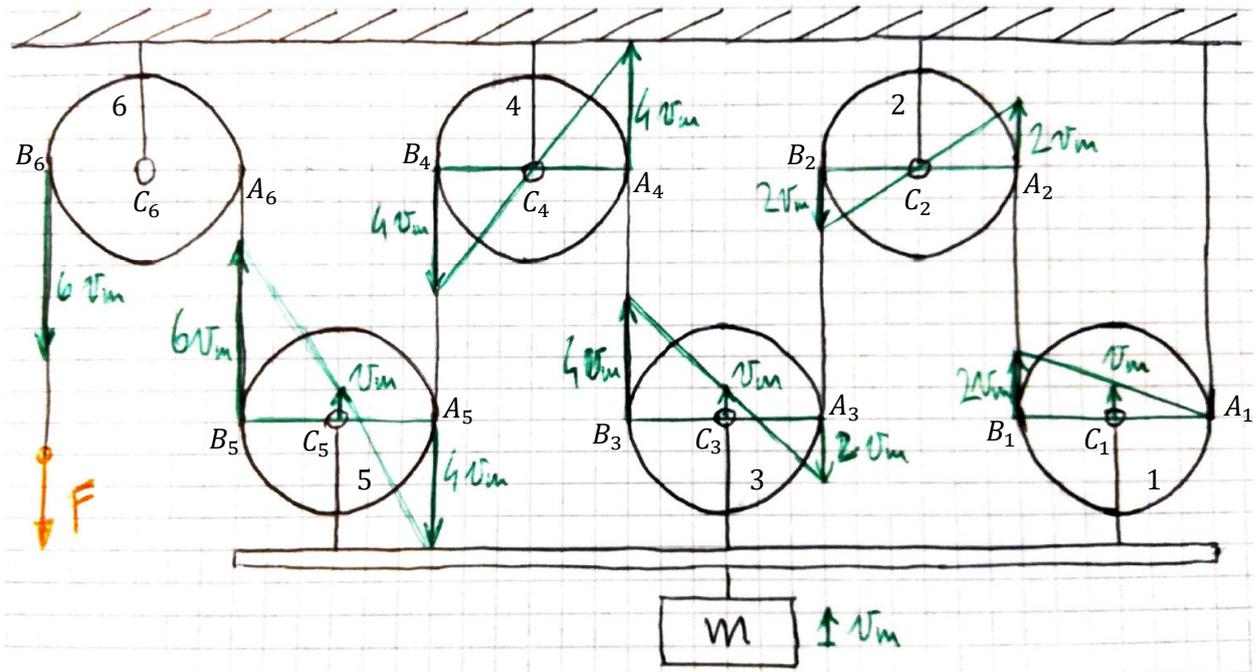
Da questa si vede ciò che era intuibile, ossia che più denti alla ruota, quindi meglio la spezzata formata dalle maglie approssima una circonferenza e minore è la fluttuazione della velocità.

Il paranco multiplo è un dispositivo di sollevamento dei carichi che ha una fune come elemento flessibile. La sua cinematica si studia facilmente se si considera che i centri delle pulegge inferiori hanno tutti la velocità v_m con cui sta venendo sollevata m e se, tenendo conto dei centri d'istantanea rotazione, si disegnano gli atti di moto. Per la puleggia 1 il c.i.r. è il punto A_1 pertanto, se C_1 ha velocità v_m , B_1 avrà $2v_m$. Tale velocità si ritrova in A_2 e, siccome il c.i.r. della puleggia 2 è in C_2 , anche in B_2 . Si ha $2v_m$ anche in A_3 ma, siccome C_3 deve avere velocità v_m , il c.i.r. della puleggia 3 è a $\frac{r}{3}$ da C_3 (infatti se x è la distanza cercata, per la linearità dell'atto di moto rigido, vale la proporzione $\frac{v_m}{x} = \frac{2v_m}{r-x} \Rightarrow x = \frac{r}{3}$); pertanto la sua velocità angolare è $\omega_3 = \frac{v_m}{r/3} = 3 \frac{v_m}{r}$, così la velocità in B_3 vale $\omega_3 \frac{4}{3} r = 4v_m$. Tale è anche la velocità in A_4 , B_4 ed A_5 per le considerazioni già fatte sulla puleggia 2. Se C_5 deve muoversi con v_m , il c.i.r. della puleggia 5 è a $\frac{r}{5}$ da C_5 (infatti $\frac{v_m}{x} = \frac{4v_m}{r-x} \Rightarrow x = \frac{r}{5}$). Allora la sua velocità angolare è $\omega_5 = \frac{v_m}{r/5} = 5 \frac{v_m}{r}$ e di conseguenza B_5 si muove con $\omega_5 \frac{6}{5} r = 6v_m$ e questa è la velocità v_F che si trova nel punto di applicazione della forza.

Generalizzando per induzione si può scrivere che, se n è il numero delle pulegge mobili, la velocità nel punto di applicazione della forza è la velocità del carico moltiplicata per $2n$.

Si applica dunque il bilancio delle potenze a velocità del sistema costante (regime assoluto: $\frac{dE_{tot}}{dt} = 0$):

$$W^F + W^m = \vec{F} \cdot \vec{v}_F + m\vec{g} \cdot \vec{v}_m = Fv_F - mgv_m = F2nv_m - mgv_m = 0 \Rightarrow F = \frac{mg}{2n}$$



21) Vibrazioni di un sistema a 1 GdL

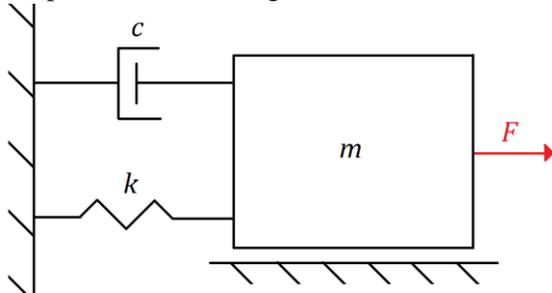
Descrivere il processo di modellazione che conduce a un sistema lineare, a coefficienti costanti a un grado di libertà. In particolare si discuta dei seguenti argomenti:

- fenomeni di trasformazione di energia meccanica e definizione di vibrazioni strutturali;
- vibrazioni libere, forzate e autoeccitate;
- modelli lineari e non lineari;
- modelli a parametri concentrati e distribuiti;
- descrivere gli elementi concentrati massa, smorzatore viscoso e rigidità; per quest'ultima si mostri il calcolo della rigidità equivalente nel caso di
 - molle in serie e in parallelo,
 - travi inflesse variamente vincolate e
 - alberi sottoposti a torsione;
- tramite sia l'equilibrio dinamico sia l'equazione di Lagrange, formulare l'equazione delle vibrazioni per un semplice modello lineare, completo e a un grado di libertà;

La vibrazione meccanica è un moto oscillatorio causato in un sistema dalla ripetuta e continua trasformazione dell'energia meccanica di forma in forma: si può avere ricambio tra energia cinetica e potenziale elastica in un sistema molla-massa, tra cinetica e potenziale gravitazionale in un pendolo, tra cinetica e pressoria del fluido nelle vibrazioni acustiche, etc... Sono dunque richieste in genere delle caratteristiche di deformabilità elastica nel sistema o tra le parti del sistema, un'inerzia e possibilmente delle proprietà di dissipazione dell'energia.

Le vibrazioni si dicono libere se, mentre si sviluppano, sul sistema non agiscono forzanti e la loro causa sono solamente le condizioni iniziali. Si dicono forzate, al contrario, le vibrazioni di un sistema sul quale agiscono delle forzanti (possibilmente tempo-varianti). Sono autoeccitate le vibrazioni forzate instabili, ossia la cui ampiezza – a causa della forzante – aumenta nel tempo.

Gran parte delle vibrazioni esistenti si scriverebbero seguendo modelli non lineari (vedi l'equazione del moto di un pendolo di massa m e lunghezza l che sarebbe, in funzione dell'angolo di oscillazione θ : $ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$), che spesso e volentieri non hanno soluzione in forma chiusa e vanno risolti numericamente. Se però le oscillazioni sono piccole, è possibile linearizzare tali modelli (l'equazione del pendolo, ponendo $\sin \theta \approx \theta$, diventa $ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$) e in tal caso otterremo equazioni per cui, in virtù della loro linearità, vale il principio di sovrapposizione degli effetti e sono note delle soluzioni semplici e di carattere generale.

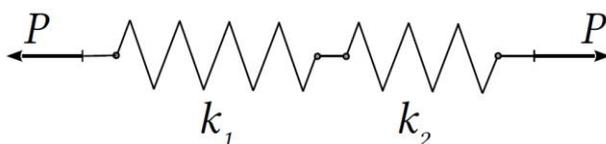


Un sistema oscillante ha, in generale, caratteristiche inerziali, di dissipazione e di rigidità distribuite nel proprio volume, al che occorrerà per questo scrivere relazioni locali (infinitesimali): l'analisi delle vibrazioni si dovrebbe quindi risolvere integrando delle PDE. Si può tuttavia scegliere, a costo della perdita di alcune informazioni, di ridurre un sistema a parametri distribuiti in uno a parametri concentrati in cui sono distinti:

- corpi rigidi, dotati di massa ma non deformabili e senza caratteristiche dissipative;
- molle, deformabili elasticamente ma prive di massa e caratteristiche dissipative;
- smorzatori, presentanti caratteristiche dissipative ma privi di massa ed elasticità.

Il moto di un tale sistema trova la sua risoluzione attraverso delle ODE, per di più lineari se considerando quanto detto sopra. Un sistema complicato a piacere (a parametri distribuiti o concentrati) trova dunque un corrispondente in un sistema ridotto composto dai tre elementi appena elencati attraverso dei parametri equivalenti funzione della geometria e delle caratteristiche del sistema iniziale. Un esempio può essere il calcolo del parametro rigidità:

- molle in serie



Applichiamo al sistema un carico di prova P e notiamo una deformazione Δx che è somma delle deformazioni di ciascuna molla Δx_1 e Δx_2 . Poiché per l'equilibrio il carico si trasmette indisturbato dall'applicazione al vincolo, ogni molla subisce su di sé proprio P e pertanto la sua deformazione sarà $\Delta x_i = \frac{P}{k_i}$, $i = 1,2$.

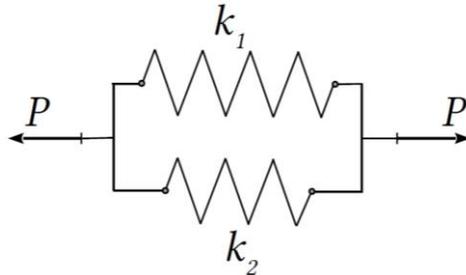
Nel sistema ridotto deve risultare che $P = k_{eq}\Delta x$, quindi

$$k_{eq} = \frac{P}{\Delta x} = \frac{P}{\Delta x_1 + \Delta x_2} = \frac{P}{\frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

Generalizzando, vale che per n molle in serie

$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}$$

- molle in parallelo



Applichiamo al sistema un carico di prova P e notiamo una deformazione Δx che è uguale per ciascuna molla. Le molle sono poi sollecitate ai propri estremi da forze P_i , $i = 1,2$ in generale tutte diverse, ma la cui somma restituisce P .

Ho per questo e per la relazione $P_i = k_i\Delta x$ valida per ciascuna molla che

$$P = P_1 + P_2 = k_1\Delta x + k_2\Delta x = (k_1 + k_2)\Delta x$$

Dal confronto con la legge costitutiva del sistema

equivalente $P = k_{eq}\Delta x$ e generalizzando a n molle in parallelo:

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^n k_i$$

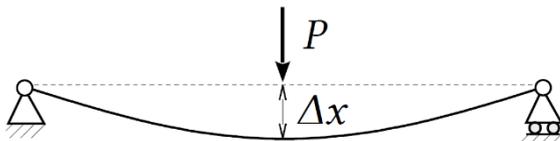
- trave incastrata in trazione/compressione

Applichiamo al sistema un carico di prova P e notiamo una deformazione $\Delta x = \frac{Pl}{EA}$. Nel sistema ridotto deve risultare che $P = k_{eq}\Delta x$, quindi

$$k_{eq} = \frac{EA}{l}$$



- trave appoggiata in flessione



Applichiamo al sistema un carico di prova P e notiamo una deformazione $\Delta x = \frac{Pl^3}{48EI}$. Nel sistema ridotto deve risultare che $P = k_{eq}\Delta x$, quindi

$$k_{eq} = \frac{48EI}{l^3}$$

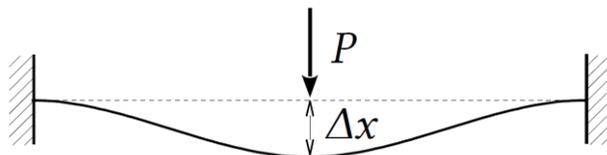
- trave incastrata in flessione



Applichiamo al sistema un carico di prova P e notiamo una deformazione $\Delta x = \frac{Pl^3}{3EI}$. Nel sistema ridotto deve risultare che $P = k_{eq}\Delta x$, quindi

$$k_{eq} = \frac{3EI}{l^3}$$

- trave doppiamente incastrata in flessione



Applichiamo al sistema un carico di prova P e notiamo una deformazione $\Delta x = \frac{Pl^3}{192EI}$. Nel sistema ridotto deve risultare che $P = k_{eq}\Delta x$, quindi

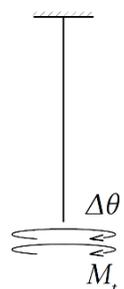
$$k_{eq} = \frac{192EI}{l^3}$$

- trave incastrata in torsione

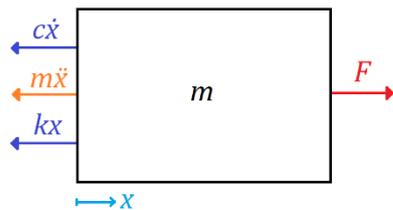
Applichiamo al sistema un momento di prova M_t e notiamo una deformazione $\Delta\theta = \frac{M_t l}{GJ}$.

Nel sistema ridotto deve risultare che $M_t = k_{eq}\Delta\theta$, quindi

$$k_{eq} = \frac{GJ}{l}$$



L'equazione del moto per un semplice modello lineare, completo e a un grado di libertà è
 - tramite il diagramma di corpo libero:



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \mathcal{F}$$

- tramite l'equazione di Lagrange, se l'energia cinetica è $E^c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ e l'energia potenziale (elastica) è $U = \frac{1}{2}kx^2$, quindi la lagrangiana è $\mathcal{L} = E^c - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$, e se la funzione di Rayleigh è $\mathcal{D} = \frac{1}{2}c\dot{x}^2$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2}c\dot{x}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \right) = \mathcal{F}$$

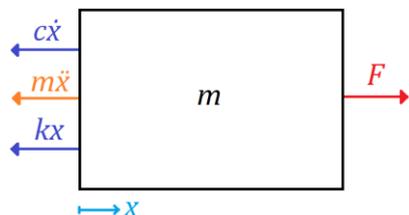
(infatti la componente lagrangiana di \mathcal{F} è \mathcal{F} stessa), che restituisce

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \mathcal{F}$$

22) Vibrazioni libere smorzate

Per le piccole oscillazioni di un sistema a un grado di libertà:

- scrivere l'equazione delle vibrazioni libere smorzate;
- calcolare l'integrale generale dell'omogenea associata e descrivere il comportamento per valori del fattore di smorzamento
 - nel caso di $\delta < 1$ e
 - nel caso di $\delta \geq 1$;
- applicare le condizioni iniziali nel caso semplificato di assenza di dissipazione;
- descrivere graficamente l'andamento nel tempo dell'oscillazione del sistema;
- mostrare come la misura delle vibrazioni libere conduce all'identificazione del sistema.



L'equilibrio sul sistema modello porta a scrivere l'equazione delle vibrazioni libere smorzate:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Dall'Analisi Matematica abbiamo che la soluzione è una combinazione lineare di funzioni del tipo

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

Allora $\dot{x}(t) = \lambda Ce^{\lambda t}$ e $\ddot{x}(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t}$ che, sostituite nell'equazione differenziale danno

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)Ce^{\lambda t} = 0$$

che è verificata solo se

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

cioè se

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

La grandezza $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ è detta pulsazione naturale o propria del sistema; infatti, in assenza di smorzamento l'equazione sarebbe $m\ddot{x} + kx = 0$, ancora una volta con soluzione che è combinazione lineare di funzioni tipo $x(t) = Ce^{\lambda t}$, le quali inserite nell'equazione di partenza danno $(m\lambda^2 + k)Ce^{\lambda t} = 0 \Rightarrow m\lambda^2 + k = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \mp i\sqrt{\frac{k}{m}} = \mp i\omega_n$, ossia la soluzione è $x(t) = C_1 e^{-i\omega_n t} + C_2 e^{i\omega_n t}$.

Si vede che, affinché $x(t)$ risulti un numero reale nonostante sia somma di due numeri complessi, C_1 e C_2 devono essere complessi coniugati. Infatti, solo se la loro somma (vettoriale) dà un numero reale, allora ho che la somma dei loro prodotti coi termini $e^{-i\omega_n t}$ e $e^{i\omega_n t}$ (che hanno l'effetto di modificarne la fase e farla variare nel tempo, cioè renderli due vettori controrotanti con stessa – in modulo – velocità angolare ω_n e simmetricamente rispetto all'asse reale) è essa stessa un numero reale. Allora, volendo scrivere delle

costanti di integrazione reali al posto di C_1 e C_2 , possiamo prenderne delle altre a e b (o loro multipli reali) tali che $C_1 = a + ib$ e $C_2 = a - ib$, così:

$$\begin{aligned} x(t) &= (a + ib)e^{-i\omega_n t} + (a - ib)e^{i\omega_n t} \\ &= (a + ib)[\cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t)] + (a - ib)[\cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t)] \\ &= a \cos(\omega_n t) - ia \sin(\omega_n t) + ib \cos(\omega_n t) + b \sin(\omega_n t) + a \cos(\omega_n t) + ia \sin(\omega_n t) \\ &\quad - ib \cos(\omega_n t) + b \sin(\omega_n t) = 2a \cos(\omega_n t) + 2b \sin(\omega_n t) \\ &= A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) \end{aligned}$$

(dove si sono ricordate: la formula di Eulero $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ e le identità trigonometriche $\cos(-\phi) = \cos \phi$ e $\sin(-\phi) = -\sin \phi$)

Potremmo vedere A e B rispettivamente come il coseno e l'opposto del seno di una fase φ entrambi moltiplicati per un'ampiezza X_o (sto traducendo tramite equazioni ponte due costanti di integrazione in altre due opinabilmente più comode) e allora si avrebbe che il moto è scrivibile come

$$x(t) = X_o \cos \varphi \cos(\omega_n t) - X_o \sin \varphi \sin(\omega_n t) = X_o \cos(\omega_n t + \varphi)$$

(dove si ricorda che: $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$)

Ecco spiegata l'importanza della frequenza propria: è la pulsazione del moto armonico del sistema se lasciato vibrare liberamente e senza smorzamento.

Si volesse risolvere questo caso imponendo delle condizioni iniziali

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

si avrebbe

$$\begin{cases} X_o \cos \varphi = x_0 \\ -\omega_n X_o \sin \varphi = v_0 \end{cases}$$

che porta dapprima, elevando al quadrato entrambi i membri di entrambe le equazioni e poi sommandole membro a membro (non dopo aver portato ω_n al denominatore del secondo membro), a

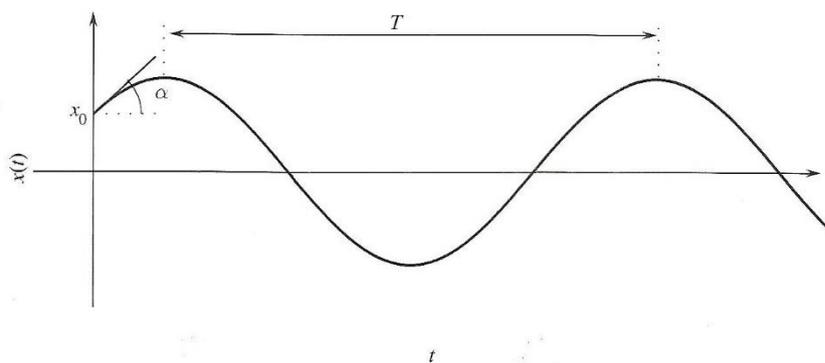
$$X_o^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_n^2} \Rightarrow X_o = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_n^2}}$$

Dividendo invece membro a membro la seconda per la prima, si ottiene

$$-\omega_n \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_0}{x_0} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left(-\frac{v_0}{\omega_n x_0} \right)$$

Dunque

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_n^2}} \cos \left(\omega_n t + \operatorname{arctg} \left(-\frac{v_0}{\omega_n x_0} \right) \right)$$



Alla luce di quanto detto sulla pulsazione naturale, si può scrivere che

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_n^2}$$

Le radici dell'equazione passano dall'essere entrambe reali all'essere complesse coniugate quando $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_n^2 = 0$, ossia quando $c = 2m\omega_n = 2\sqrt{km}$. Chiamo questo valore smorzamento critico c_{cr} e definisco un adimensionale, il fattore di smorzamento, come

$$\delta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

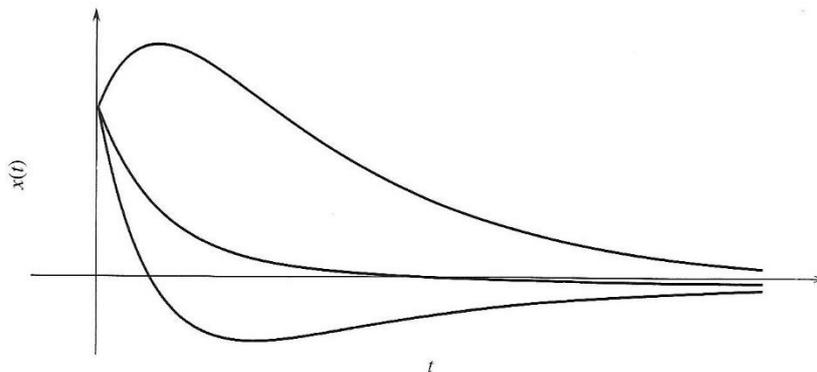
Troveremo quindi diversi tipi di soluzioni in base al valore di δ e anche le radici λ possono essere scritte come funzione sua e della pulsazione naturale:

$$\lambda_{1,2} = -\delta\omega_n \mp \sqrt{\delta^2 - 1} \omega_n$$

Se $\delta \geq 1$, le radici sono entrambe reali e la soluzione del moto è

$$x(t) = C_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})\omega_n t}$$

Dire che $\delta \geq 1$ significa rendere le quantità $-\delta \mp \sqrt{\delta^2 - 1}$ sicuramente negative, dunque la soluzione è somma di due esponenziali negativi. Essendo che la funzione tende necessariamente a zero, un moto del genere arriverà alla quiete (asintotica) senza compiere nemmeno un'oscillazione completa a dispetto di qualsiasi condizione iniziale sulla posizione o sulla velocità si imponga.



Nel caso particolare in cui $\delta = 1$, si ha

$$x(t) = C_1 e^{-\delta\omega_n t} + C_2 t e^{-\delta\omega_n t}$$

funzione per la quale vale esattamente quanto detto finora.

Se $\delta < 1$, le radici sono complesse coniugate e la soluzione del moto è

$$x(t) = C_1 e^{(-\delta\omega_n - i\sqrt{1-\delta^2}\omega_n)t} + C_2 e^{(-\delta\omega_n + i\sqrt{1-\delta^2}\omega_n)t}$$

Se definisco $\omega_s = \sqrt{1 - \delta^2}\omega_n$, ottengo

$$x(t) = C_1 e^{(-\delta\omega_n - i\omega_s)t} + C_2 e^{(-\delta\omega_n + i\omega_s)t} = e^{-\delta\omega_n t} (C_1 e^{-i\omega_s t} + C_2 e^{i\omega_s t})$$

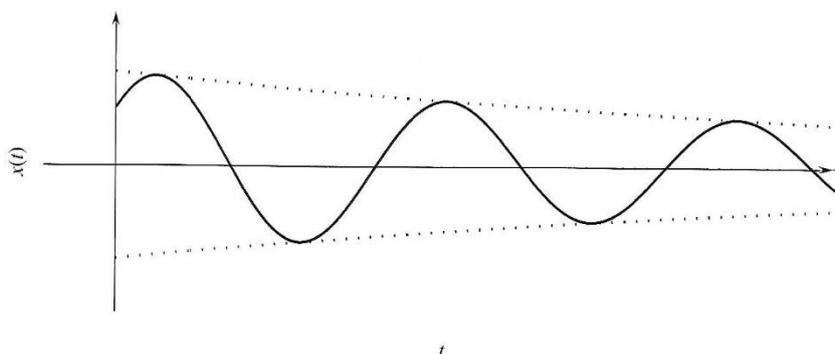
Ancora un volta, dev'essere che le costanti di integrazione devono essere numeri complessi coniugati. Allora, se $A = 2 \operatorname{Re}(C_1) = 2 \operatorname{Re}(C_2)$ e $B = 2 \operatorname{Im}(C_1) = -2 \operatorname{Im}(C_2)$,

$$x(t) = e^{-\delta\omega_n t} [A \cos(\omega_s t) + B \sin(\omega_s t)]$$

Sempre come già visto, se $A = X_o \cos \varphi$ e $B = -X_o \sin \varphi$ (ciò equivale a dire che $X_o = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{B}{A}\right)$), allora:

$$x(t) = X_o e^{-\delta\omega_n t} \cos(\omega_s t + \varphi)$$

Graficando questa funzione si vede che rappresenta un'oscillazione armonica smorzata – quindi inclusa tra le curve $X_o e^{-\delta\omega_n t}$ e $-X_o e^{-\delta\omega_n t}$ – di frequenza ω_s (e quindi pseudoperiodo $T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$). Valori tipici di δ sono $10^{-4} \div 10^{-2}$, perciò lo smorzamento sarà poco evidente, seppur presente.



In sintesi, lo studio delle vibrazioni libere fornisce informazioni sul sistema quali le sopra citate ω_n , ω_s e δ , grandezze che compaiono anche quando il moto è forzato.

23) Vibrazioni forzate da un'azione costante a gradino

Per le piccole oscillazioni di un sistema a un grado di libertà:

- scrivere l'equazione delle vibrazioni forzate con un'eccitazione costante;
- calcolare l'integrale particolare;
- per condizioni iniziali omogenee, fornire l'integrale generale $x(t) = x_o(t) + x_p(t)$, somma dell'integrale particolare e della soluzione dell'omogenea associata, per un fattore di smorzamento $\delta < 1$;
- disegnare accuratamente l'andamento nel tempo dell'integrale generale, per le condizioni iniziali del punto precedente;
- descrivere l'utilità pratica dell'analisi di una risposta di questo tipo.

L'equazione delle vibrazioni forzate con forzante a gradino $\mathcal{F}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ F_0 & t > 0 \end{cases}$ è, per tempi positivi:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0$$

L'integrale generale $x(t)$ sarà somma della soluzione dell'omogenea associata $x_o(t)$ e dell'integrale particolare $x_p(t)$.

La soluzione di $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ (omogenea associata) – se l'equazione caratteristica è

$$m\lambda^2 + c\lambda + kx = 0$$

e le sue radici sono quindi

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_n^2} = -\delta\omega_n \mp \sqrt{\delta^2 - 1} \omega_n$$

(ricordiamo $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\delta = \frac{c}{2m\omega_n}$) che, ponendo $\delta < 1$, divengono

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_n^2} = -\delta\omega_n \mp i\sqrt{1 - \delta^2} \omega_n = -\delta\omega_n \mp i\omega_s$$

(ricordiamo $\omega_s = \sqrt{1 - \delta^2} \omega_n$) – è:

$$x_o(t) = e^{-\delta\omega_n t} (C_1 e^{-i\omega_s t} + C_2 e^{i\omega_s t}) = e^{-\delta\omega_n t} [A \cos(\omega_s t) + B \sin(\omega_s t)]$$

(C_1 e C_2 sono complessi coniugati e $A = 2 \operatorname{Re}(C_1) = 2 \operatorname{Re}(C_2)$ e $B = 2 \operatorname{Im}(C_1) = -2 \operatorname{Im}(C_2)$).

Esiste poi una terza forma per scrivere $x_o(t)$ ossia, se $X_o = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{B}{A}\right)$:

$$x_o(t) = X_o e^{-\delta\omega_n t} \cos(\omega_s t + \varphi)$$

La forzante è una costante, quindi l'Analisi Matematica suggerisce che l'integrale particolare sia

$$x_p(t) = H$$

Il valore di H si trova derivando e inserendo l'espressione nell'equazione della dinamica:

$$kH = F_0 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{F_0}{k}$$

L'integrale generale sarà

$$x(t) = e^{-\delta\omega_n t} [A \cos(\omega_s t) + B \sin(\omega_s t)] + \frac{F_0}{k}$$

Applicando condizioni iniziali omogenee

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

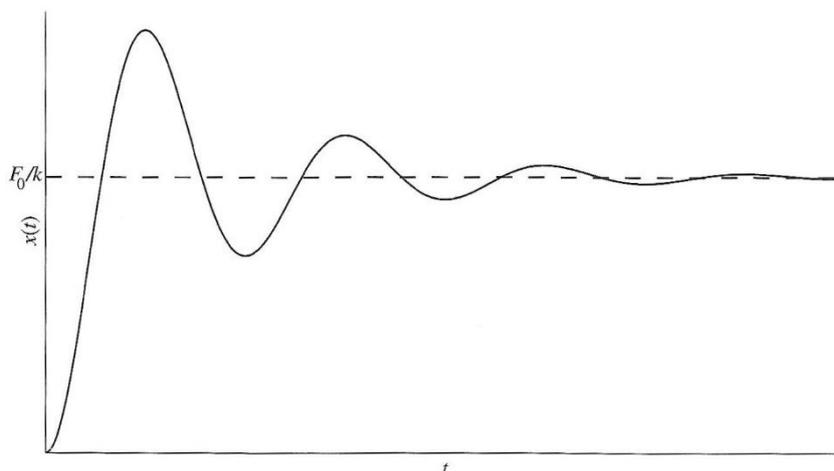
si ha

$$\begin{cases} A + \frac{F_0}{k} = 0 \\ -\delta\omega_n A + \omega_s B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{F_0}{k} \\ B = -\delta \frac{\omega_n F_0}{\omega_s k} = -\frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \frac{F_0}{k} \end{cases}$$

Così:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\delta\omega_n t} \left[-\frac{F_0}{k} \cos(\omega_s t) - \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \frac{F_0}{k} \sin(\omega_s t) \right] + \frac{F_0}{k} \\ &= \frac{F_0}{k} \left\{ 1 - e^{-\delta\omega_n t} \left[\cos(\omega_s t) + \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \sin(\omega_s t) \right] \right\} \end{aligned}$$

Graficando la funzione:



Un tale genere di risposta è quello – ad esempio – di una massa che, appesa in verticale tramite una molla e un dissipatore viscoso, viene abbandonata alla forza di gravità partendo dalla configurazione in cui la molla è indeformata e senza velocità iniziale. La massa inizierà ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio statico, esattamente quella che raggiungerà asintoticamente quando per la dissipazione le oscillazioni si estingueranno.

24) Vibrazioni forzate da un'azione armonica

Per le piccole oscillazioni di un sistema a un grado di libertà:

- scrivere l'equazione delle vibrazioni forzate da un'azione armonica;
- trovare l'integrale particolare impiegando la notazione complessa;
- mostrare la variazione con la frequenza e lo smorzamento dell'integrale particolare indicando le tre principali categorie di comportamento;
- definire la funzione di risposta complessa in frequenza;
- fornire l'interpretazione geometrica poligonale dell'integrale particolare;
- mostrare l'integrale generale come somma dell'integrale particolare e dell'integrale generale dell'omogenea associata;
- esporre l'esempio del rotore squilibrato.

L'equazione delle vibrazioni forzate con forzante $\mathcal{F}(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ è:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

La forzante è una funzione armonica, quindi l'Analisi Matematica suggerisce che l'integrale particolare sia

$$x_p(t) = X_p \cos(\Omega t + \psi)$$

Attenzione: X_p e ψ non sono costanti di integrazione, bensì valori dipendenti dalle caratteristiche della forzante (F_0 e Ω) e del sistema (m , c e k).

Risulta più facile risolvere, per trovare l'integrale particolare, il problema ausiliario

$$m\ddot{x}^* + c\dot{x}^* + kx^* = F_0 e^{i\Omega t}$$

per cui, allo stesso modo, si avrà

$$x_p^*(t) = X_p e^{i(\Omega t + \psi)}$$

(infatti il problema originario non è che la proiezione reale di questo; vedi che $F_0 \cos(\Omega t) = \text{Re}(F_0 e^{i\Omega t})$ e $X_p \cos(\Omega t + \psi) = \text{Re}(X_p e^{i(\Omega t + \psi)})$).

Si può elaborare la soluzione particolare:

$$x_p^*(t) = X_p e^{i\psi} e^{i\Omega t} = X^* e^{i\Omega t}$$

dove X^* è un numero complesso di modulo X_p e fase ψ .

Derivando quest'espressione e inserendola nell'equazione del problema ausiliario si ha

$$(-m\Omega^2 + ic\Omega + k)X^* e^{i\Omega t} = F_0 e^{i\Omega t}$$

Ma allora

$$X^* = \frac{F_0}{-m\Omega^2 + ic\Omega + k}$$

Dividendo a numeratore e denominatore per k , ricordando le relazioni $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ e $\delta = \frac{c}{2m\omega_n}$ ed elaborando la parte immaginaria del denominatore in

$$\frac{c\Omega}{k} = \Omega \frac{c}{m} \frac{m}{k} = \Omega 2\omega_n \delta \frac{1}{\omega_n^2} = 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}$$

si può scrivere

$$X^* = \frac{F_0/k}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}}$$

Si possono allora ricavare X_p e ψ . Ricordiamo che, per un numero complesso $z = \frac{ae^{i\alpha}}{be^{i\beta}}$, il suo modulo è $|z| = \frac{|ae^{i\alpha}|}{|be^{i\beta}|} = \frac{a}{b}$ e la sua fase $\langle z \rangle = \langle ae^{i\alpha} \rangle - \langle be^{i\beta} \rangle = \alpha - \beta$. Allora:

$$X_p = |X^*| = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

e

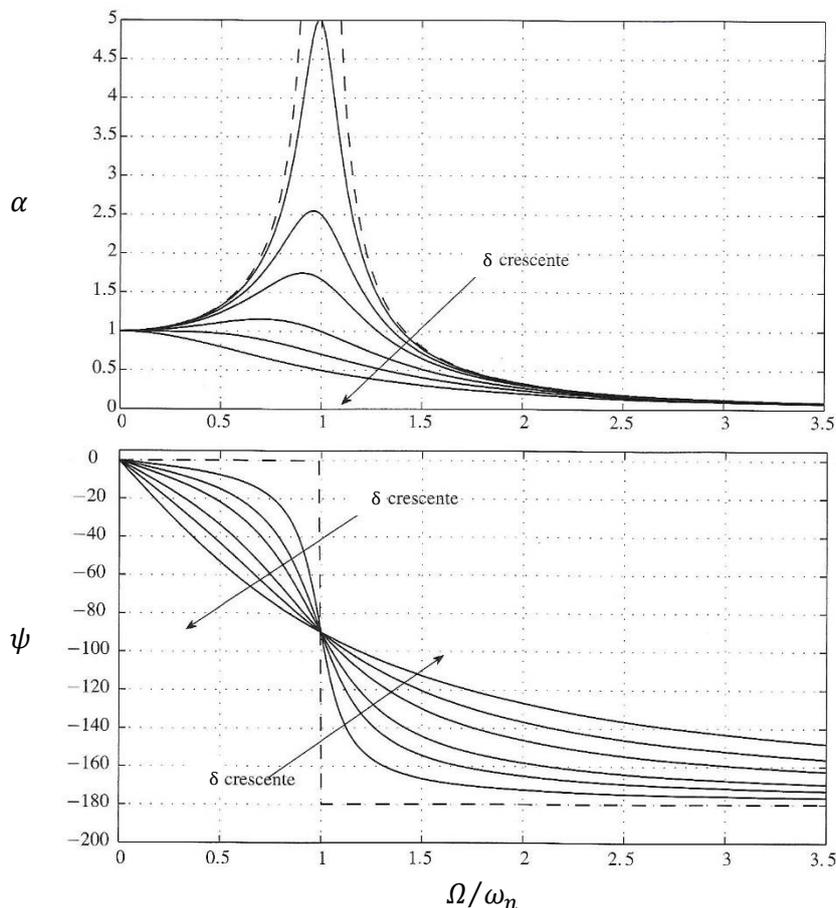
$$\psi = \langle X^* \rangle = -\langle 1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n} \rangle = \text{arctg} \left(-\frac{2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

(sfruttando nell'ultimo passaggio anche la disparità della funzione arcotangente).

Si definisce coefficiente di amplificazione dinamica α l'adimensionale che rapporta l'ampiezza X_p della risposta a una forzante armonica $F_0 \cos(\Omega t)$ alla deformazione che provocherebbe una forza statica F_0 , ossia $X_{st} = \frac{F_0}{k}$, come è facile verificare. Allora

$$\alpha = \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} \right)^{-1}$$

Volendo tracciare l'andamento di α e di ψ in funzione di $\frac{\Omega}{\omega_n}$ e δ , si otterrebbe:



Si distinguono tre zone:

- zona quasi-statica ($\frac{\Omega}{\omega_n} \ll 1$): a dispetto del valore di δ , α è prossimo a 1, quindi la risposta armonica è paragonabile a quella statica, mentre ψ è prossimo a 0, pertanto l'oscillazione è in fase con la forzante;
- zona di risonanza ($\frac{\Omega}{\omega_n} \approx 1$): α tende a essere tanto più grande quanto più la frequenza della forzante è vicina a quella propria del sistema e quanto più lo smorzamento δ è piccolo, mentre ψ attraversa con pendenza ripida (tanto più quanto più lo smorzamento δ è piccolo) valori tra 0 e $-\pi$. Se fosse $\Omega = \omega_n$ e $\delta = 0$, l'amplificazione sarebbe infinita e lo sfasamento $-\frac{\pi}{2}$. È da evitare che il sistema ricada in questa zona;
- zona sismografica ($\frac{\Omega}{\omega_n} \gg 1$): a dispetto del valore di δ , α è prossimo a 0, quindi la risposta armonica è trascurabile rispetto a quella statica, mentre ψ è prossimo a $-\pi$, pertanto l'oscillazione è in controfase con la forzante.

Si definisce la funzione complessa di risposta in frequenza come rapporto tra l'ampiezza (complessa) X^* della risposta armonica e l'ampiezza F_0 della forzante:

$$G(i\Omega) = \frac{1/k}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}}$$

Per situazioni diverse in cui cambia F_0 si potrà sempre ricavare $X^* = F_0 G(i\Omega)$.

Si può poi dare un'interpretazione geometrica sul piano di Gauss dell'integrale particolare. Infatti, se nell'equazione della dinamica sostituisco $x_p^*(t)$ e sue derivate ottengo

$$F_0 e^{i\Omega t} - kX^* e^{i\Omega t} - ic\Omega X^* e^{i\Omega t} + m\Omega^2 X^* e^{i\Omega t} = 0$$

Chiamo

- $F_{ext}^* = F_0 e^{i\Omega t}$,
- $F_{el}^* = -kX^* e^{i\Omega t}$,
- $F_{vis}^* = -ic\Omega X^* e^{i\Omega t}$ e
- $F_{in}^* = m\Omega^2 X^* e^{i\Omega t}$

e noto che

$$\frac{|F_{in}^*|}{|F_{el}^*|} = \frac{m\Omega^2}{k} = \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}$$

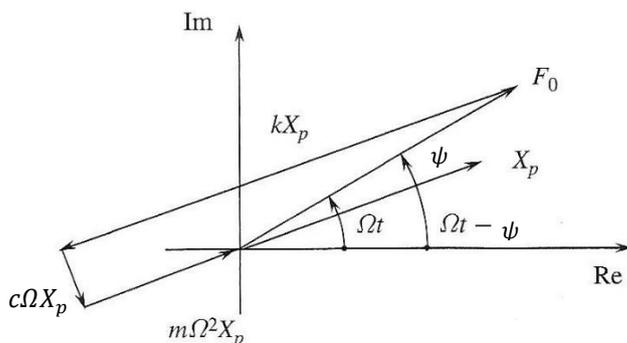
e

$$\frac{|F_{vis}^*|}{|F_{el}^*|} = \frac{c\Omega}{k} = \Omega \frac{c}{m} \frac{m}{k} = 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}$$

Visualizzo questa somma vettoriale nei tre casi:

- $\Omega \ll \omega_n$ (zona quasi-statica)

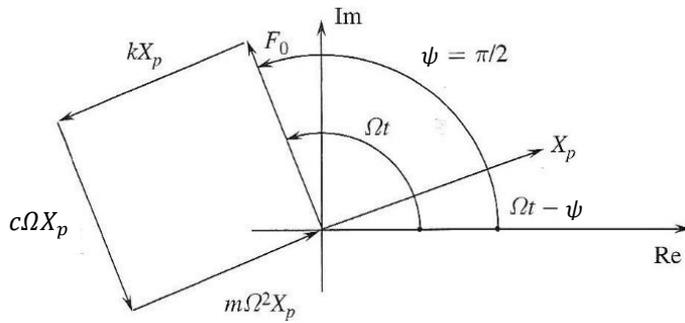
Si vede che $|F_{in}^*| \ll |F_{el}^*|$ e $|F_{vis}^*| \ll |F_{el}^*|$, dunque ad equilibrare F_{ext}^* dev'essere principalmente F_{el}^* , condizione che porta a uno sfasamento ψ prossimo a 0.



In queste condizioni occorrerà massimizzare la rigidità k del sistema.

- $\Omega \approx \omega_n$ (zona di risonanza)

Si prenda il caso in cui $\Omega = \omega_n$. Allora $|F_{in}^*| = |F_{el}^*|$ e, essendo che queste due forze sono in opposizione di fase, si elideranno lasciando solo a F_{vis}^* il compito di bilanciare F_{ext}^* . Lo sfasamento ψ sarà dunque di $-\frac{\pi}{2}$ (infatti F_{vis}^* dev'essere antiparallela a F_{ext}^* , quindi perpendicolare a F_{el}^* che ha fase opposta di x_p)



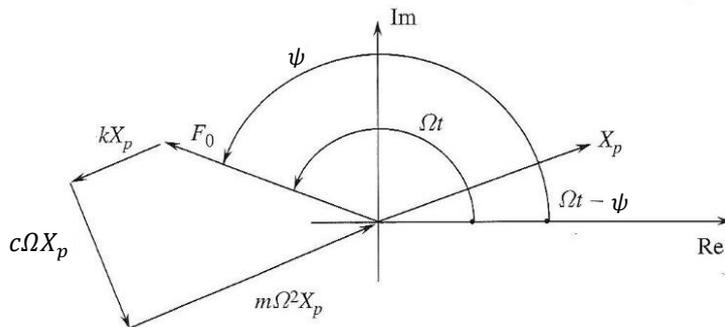
Si dà così spiegazione delle grandi oscillazioni che si manifestano in zona di risonanza: se δ (quindi c) è troppo piccolo, il modulo $c\Omega|x_p^*$ di F_{vis}^* dev'essere reso tanto grande da bilanciare F_{ext}^* dal termine $|x_p^*|$. La zona di risonanza è da evitare ma, se ci si trova, occorrerà aumentare lo smorzamento.

- $\Omega \gg \omega_n$ (zona sismografica)

Si vede che $|F_{in}^*| \gg |F_{el}^*|$ e $|F_{vis}^*| \gg |F_{el}^*|$ ma anche che a prevalere tra la forza di inerzia e quella viscosa, visto che

$$\frac{|F_{in}^*|}{|F_{vis}^*|} = \frac{\Omega/\omega_n}{2\delta}$$

e che δ è in genere piccolo, è la prima; dunque ad equilibrare F_{ext}^* dev'essere principalmente F_{in}^* , condizione che porta a uno sfasamento ψ prossimo a $-\pi$.



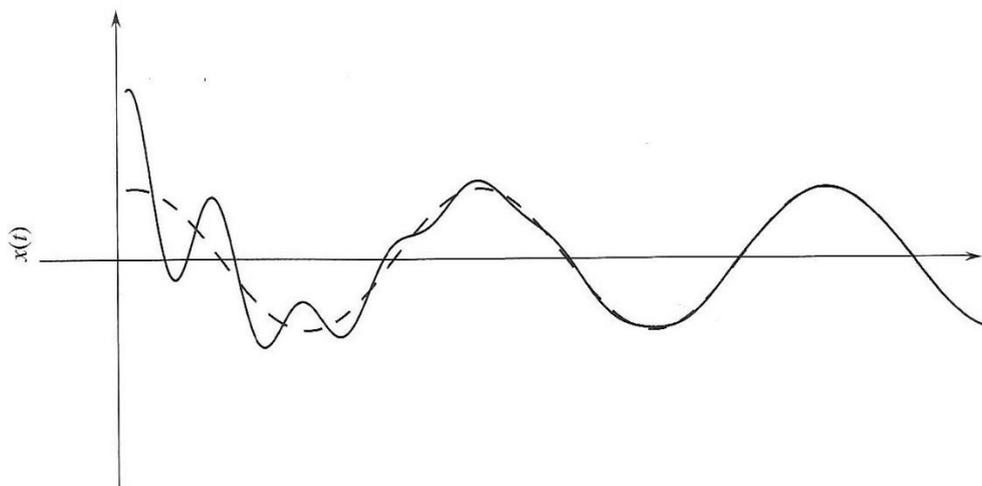
In queste condizioni occorrerà massimizzare l'inerzia m del sistema.

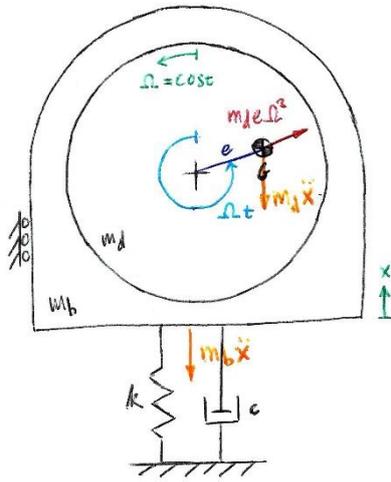
L'integrale generale $x(t)$ sarà somma della soluzione dell'omogenea associata $x_o(t)$ (per $\delta < 1$) e dell'integrale particolare $x_p(t)$ che è la proiezione sull'asse reale di $x_p^*(t)$, quindi

$$x_p(t) = \text{Re}(x_p^*(t)) = \text{Re}(X^* e^{i\Omega t}) = \text{Re}(X_p e^{i\psi} e^{i\Omega t}) = X_p \cos(\Omega t + \psi)$$

Così:

$$x(t) = X_o e^{-\delta\omega_n t} \cos(\omega_s t + \varphi) + X_p \cos(\Omega t + \psi)$$





Esempio – Rotore squilibrato

Un disco di massa m_d con centro di massa G eccentrico di una distanza e dall'asse ruota con velocità angolare costante Ω è incassato in un basamento di massa m_b fissato al telaio tramite una molla e uno smorzatore in parallelo. Si indica con x la coordinata libera del basamento in un sistema di riferimento fisso. La coordinata del centro di massa del disco (sempre in un sistema di riferimento fisso) sarà $x_G = x + e \cos(\Omega t)$ (si precisa che all'istante iniziale G si trova in verticale sopra l'asse).

La forza d'inerzia del disco vale $m_d \ddot{x}_G$, quella del basamento $m_b \ddot{x}$; così l'equazione della dinamica è

$$m_d \ddot{x}_G + m_b \ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0$$

Siccome $\ddot{x}_G = \ddot{x} - e \Omega^2 \cos(\Omega t)$, si scrive

$$(m_d + m_b) \ddot{x} + c \dot{x} + kx = m_d e \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

Per la teoria sopra trattata, si avrà un integrale particolare

$$x_p(t) = X_p \cos(\Omega t + \psi)$$

con

$$X_p = \frac{\frac{m_d e \Omega^2}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\psi = \arctg\left(-\frac{2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}\right)$$

(posti $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_d + m_b}}$ e $\delta = \frac{c}{2(m_d + m_b)\omega_n}$).

25) Vibrazioni forzate da un'azione periodica

Per le piccole oscillazioni di un sistema a un grado di libertà:

- scrivere l'equazione delle vibrazioni forzate da un'azione periodica;
- esprimere l'integrale particolare;
- descrivere l'approssimazione ingegneristica della risposta;
- mostrare l'esempio delle vibrazioni di un motore monocilindrico montato su supporti elastici forzate dal manovellismo.

Se il moto è forzato da una generica azione periodica $\mathcal{F}(t)$ (quindi tale che $\forall t \mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(t + T)$), l'equazione della dinamica è

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \mathcal{F}(t)$$

È tuttavia possibile sviluppare una qualsiasi funzione periodica in serie di Fourier:

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} [A_j \cos(j\Omega_0 t) + B_j \sin(j\Omega_0 t)]$$

con

$$\mathcal{F}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{F}(t) dt$$

$$A_j = \frac{2}{T} \int_0^T \mathcal{F}(t) \cos(j\Omega_0 t) dt$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$B_j = \frac{2}{T} \int_0^T \mathcal{F}(t) \sin(j\Omega_0 t) dt$$

Lo sviluppo può essere scritto tuttavia, se poniamo

$$C_j = \sqrt{A_j^2 + B_j^2}$$

$$\gamma_j = \arctg\left(-\frac{B_j}{A_j}\right)$$

come

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cos(j\Omega_0 t + \gamma_j)$$

Cerchiamo una soluzione particolare nella forma della forzante, quindi

$$x_p(t) = X_0 + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \cos(j\Omega_0 t + \psi_j)$$

In realtà conviene sempre risolvere il problema ausiliario di cui il problema che trattiamo è la proiezione sull'asse reale:

$$\mathcal{F}^*(t) = \mathcal{F}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} F_j^* e^{ij\Omega_0 t}$$

con $F_j^* = C_j e^{i\psi_j}$, per cui la soluzione particolare sarà

$$x_p^*(t) = X_0 + \sum_{j=1}^{\infty} X_j^* e^{ij\Omega_0 t}$$

con $X_j^* = X_j e^{i\psi_j}$.

Nota la funzione di risposta in frequenza

$$G(ij\Omega_0) = \frac{1/k}{1 - \frac{(j\Omega_0)^2}{\omega_n^2} + i 2\delta \frac{j\Omega_0}{\omega_n}}$$

si può ricavare

$$X_j^* = F_j^* G(ij\Omega_0) = \frac{F_j^*/k}{1 - \frac{(j\Omega_0)^2}{\omega_n^2} + i 2\delta \frac{j\Omega_0}{\omega_n}}$$

mentre

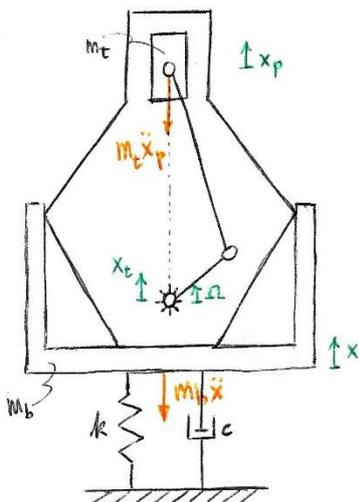
$$X_0 = \frac{\mathcal{F}_0}{k}$$

La soluzione particolare sarà allora

$$x_p(t) = X_0 + \text{Re} \left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j^* e^{ij\Omega_0 t} \right)$$

Si è visto che se la frequenza $j\Omega_0$ della forzante è molto maggiore della frequenza propria ω_n , la risposta armonica è trascurabile. Quindi, anziché calcolare la serie, si può calcolare una sommatoria per N termini con N numero tanto grande affinché $N\Omega_0$ sia molto maggiore di ω_n . Allora l'approssimazione ingegneristicamente accettabile è che

$$x_p(t) \approx X_0 + \text{Re} \left(\sum_{j=1}^N X_j^* e^{ij\Omega_0 t} \right)$$



Esempio – Vibrazioni forzate da un manovellismo

Un manovellismo ordinario di spinta è incassato in un basamento di massa m_b . Si considera la riduzione a due masse della biella e si nota che, posto il giusto contrappeso, le forze d'inerzia delle masse attribuibili alla manovella sono tutte bilanciate, ma non lo è quella della massa m_t (somma di una porzione della massa della biella e della massa del pistone). Il basamento è vincolato a muoversi in una sola direzione e collegato a terra tramite il parallelo di una molla e di uno smorzatore e la rotazione della manovella è a velocità costante Ω . x è la coordinata del basamento, x_p quella del pistone, entrambe nello stesso sistema di riferimento fisso, cosicché le forze d'inerzia di basamento e pistone siano rispettivamente $m_t \ddot{x}_p$ e $m_b \ddot{x}$, quindi l'equazione della dinamica è

$$m_t \ddot{x}_p + m_b \ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Eppure x ed x_p sono collegati dal moto del pistone x_t (vale che $x_p = x + x_t$), per il quale si può usare l'approssimazione del secondo ordine

$$x_{t,II} = a \cos(\Omega t) + b \left(1 - \frac{\lambda^2 \sin^2(\Omega t)}{2} \right) \Rightarrow$$

(ricordiamo che $\lambda = \frac{a}{b}$ e $\sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$)

$$\Rightarrow \dot{x}_{t,II} = -a\Omega \sin(\Omega t) - b\Omega\lambda^2 \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) = -a\Omega \left[\sin(\Omega t) + \frac{\lambda}{2} \sin(2\Omega t) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_{t,II} = -a\Omega^2 [\cos(\Omega t) + \lambda \cos(2\Omega t)]$$

Allora

$$m_t \{ \ddot{x} - a\Omega^2 [\cos(\Omega t) + \lambda \cos(2\Omega t)] \} + m_b \ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_t + m_b) \ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_t a\Omega^2 [\cos(\Omega t) + \lambda \cos(2\Omega t)]$$

Le forzanti – come si vede – sono due, aventi frequenza una il doppio dell'altra. Esistono tecniche che permettono di annullarle (disporre di ulteriori contrappesi, allineare più cilindri in disposizioni geometricamente convenienti, etc...) ma non sempre è possibile. Qualora avessi qualcuna di queste forzanti, dovrei dimensionare molla e smorzatore di conseguenza. C'è di buono che, dimensionato il sistema per le forzanti di frequenza più bassa, tale scelta andrà in genere bene per le forzanti di frequenza maggiore.

26) Isolamento delle vibrazioni

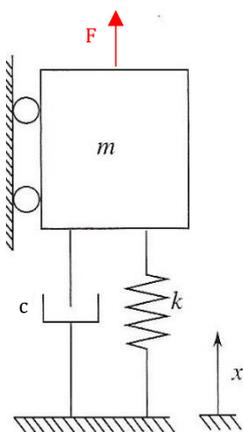
Si consideri uno stabilimento industriale in cui ci sono macchine che producono vibrazioni e altre che devono essere protette dai disturbi provenienti dal pavimento. Per una delle macchine menzionate:

- descrivere le situazioni in cui è opportuno ricorrere a dispositivi isolanti, per ridurre la trasmissione delle vibrazioni sia nel caso provengano dal basamento sia nel caso siano prodotte dalla macchina;
- mostrare le caratteristiche fisiche, le implicazioni tecnologiche e le semplificazioni che conducono alla modellazione con un solo grado di libertà;
- per entrambi i casi menzionati al punto a)
 - formulare i modelli ed esporre i risultati utili per un efficace isolamento,
 - descrivere i due tipi di strategie adottate in relazione ai risultati ottenuti, i dispositivi utilizzati per l'isolamento e gli effetti con essi ottenuti.

Si ricorre a dispositivi per l'isolamento delle vibrazioni – ad esempio tra pavimentazione e macchine in un impianto industriale – quando:

- una macchina in cui le forze di inerzia non sono equilibrate può trasmettere vibrazioni al vincolo causando disturbi o
- quando dal vincolo provengono vibrazioni che potrebbero danneggiare la macchina.

Viene usato il modello di vibrazioni a un solo grado di libertà poiché più facile da studiare (richiede la risoluzione di ODE anziché PDE) ma anche perché siamo interessati – ad esempio sempre nel caso macchina-pavimento industriale – solo alla componente di vibrazione ortogonale al vincolo.



Così

Nel caso in cui ci sia una forzante armonica $F = F_0 \cos \Omega t$ sulla macchina che è collegata al vincolo tramite un parallelo molla-smorzatore, la forza trasmessa al terreno è

$$F_T = F_{el} + F_{visc} = kx + c\dot{x}$$

L'equazione d'equilibrio sulla macchina d'altronde è

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

che può essere vista come proiezione sull'asse reale dell'equazione

$$m\dot{x}^* + c\dot{x}^* + kx^* = F_0 e^{i\Omega t}$$

che ha come soluzione particolare (ci mettiamo infatti nelle condizioni di regime)

$$x_p^*(t) = X_p^* e^{i\Omega t}$$

$$\text{(dove } X_p^* = F_0 G(i\Omega) = \frac{F_0/k}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}} \text{)}$$

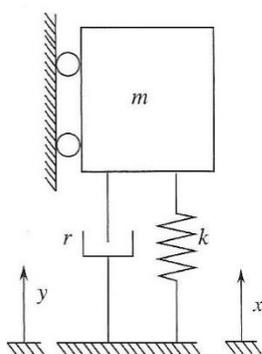
$$F_T = \text{Re}(kx_p^* + c\dot{x}_p^*) = \text{Re} \left((k + i\Omega c) X_p^* e^{i\Omega t} \right) = \text{Re} \left(F_0 \frac{k + i\Omega c}{k \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n} \right)} e^{i\Omega t} \right)$$

$$= \text{Re} \left(F_0 \frac{1 + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}} e^{i\Omega t} \right)$$

(nell'ultimo passaggio è stata usata la relazione $\frac{c}{k} = \frac{2\delta}{\omega_n}$).

Allora, se definiamo la trasmissibilità t come il rapporto tra il modulo di F_T e l'ampiezza F_0 della forzante, possiamo scrivere

$$t = \frac{|F_T|}{F_0} = \left| \frac{1 + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}} \right| = \frac{\sqrt{1 + 4\delta^2 \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}}$$



Nel caso in cui ci sia una vibrazione armonica $y = Y_0 \cos \Omega t$ del vincolo che è collegato alla macchina tramite un parallelo molla-smorzatore, il bilancio sulla macchina è

$$m\ddot{x} + r(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

(infatti la deformazione e velocità di deformazione del parallelo molla-smorzatore sono $(x - y)$ e $(\dot{x} - \dot{y})$).

Affrontiamo il problema di cui quello in questione è la proiezione sull'asse reale, ossia quello in cui la vibrazione del vincolo è $y^* = Y_0 e^{i\Omega t}$. L'equazione del moto si scrive

$$m\ddot{x}^* + r\dot{x}^* + kx^* = (k + i\Omega c)Y_0 e^{i\Omega t}$$

Chiamiamo $\bar{F}_0^* = (k + i\Omega c)Y_0$, così abbiamo

$$m\ddot{x}^* + r\dot{x}^* + kx^* = \bar{F}_0^* e^{i\Omega t}$$

che ha come soluzione particolare (ci mettiamo infatti nelle condizioni di regime)

$$x_p^*(t) = X_p^* e^{i\Omega t}$$

Dove

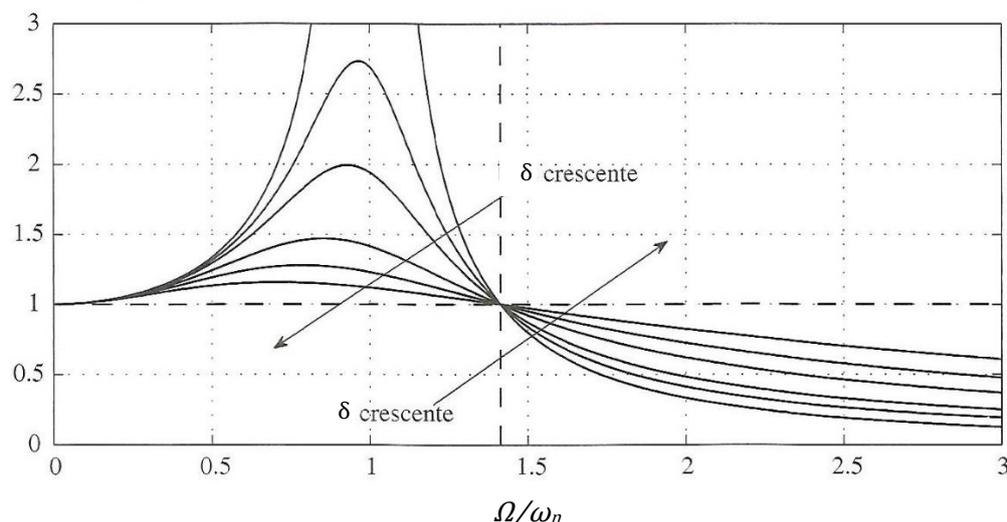
$$X_p^* = \bar{F}_0^* G(i\Omega) = \frac{\bar{F}_0^*/k}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}} = \frac{Y_0 \frac{(k + i\Omega c)}{k}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}} = \frac{Y_0 \left(1 + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}\right)}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}}$$

(nell'ultimo passaggio è stata usata la relazione $\frac{c}{k} = \frac{2\delta}{\omega_n}$).

Allora, se definiamo la trasmissibilità t come il rapporto tra il modulo di X_p^* e l'ampiezza della vibrazione Y_0 del vincolo, possiamo scrivere

$$t = \frac{|X_p^*|}{Y_0} = \left| \frac{1 + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}} \right| = \frac{\sqrt{1 + 4\delta^2 \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}}$$

La trasmissibilità è la stessa in entrambi i casi quindi si può agire allo stesso modo per isolare una forza proveniente dalla macchina o una vibrazione proveniente dal terreno. In particolare, questa è funzione del rapporto $\frac{\Omega}{\omega_n}$ e del fattore di smorzamento δ . Se graficata, si trova:



Notiamo che:

- per $\frac{\Omega}{\omega_n} \ll 1$ ho che $t \approx 1$, quindi si ha trasmissione sostanzialmente integrale (semmai leggermente superiore) di forzanti o vibrazioni;
- per $\frac{\Omega}{\omega_n} \approx 1$ ho che t esplose, quindi le forzanti e le vibrazioni sono notevolmente amplificate, soprattutto per δ piccoli;
- per $\frac{\Omega}{\omega_n} \gg \sqrt{2}$ ho che t è molto piccolo (in generale minore di 1), ossia forzanti e vibrazioni vengono ridotte nel passaggio per le fondazioni.

Si hanno quindi due modi per almeno evitare che forzanti e vibrazioni crescano fino a livelli potenzialmente pericolosi, ossia rendendo ω_n (l'unico parametro su cui possiamo agire nella progettazione delle fondazioni) o molto più piccolo o molto più grande rispetto a Ω . Si realizzano di conseguenza due tipi di fondazioni:

- rigide, se $\omega_n > 2\Omega$, cioè se, in $\omega_n = \sqrt{k/m}$, k è reso molto grande;
- sospese, se $\omega_n < \frac{\Omega}{\sqrt{2}}$, cioè se, in $\omega_n = \sqrt{k/m}$, k è reso piccolo ed m invece grande; tuttavia, la scelta di aumentare molto la massa del sistema – ad esempio aggiungendo un basamento – e diminuire la rigidità porta ad avere una posizione di equilibrio statico molto lontana dalla configurazione indeformata, quindi anche un'ampiezza notevole della vibrazione: bisogna assicurarsi che le strutture collegate alla macchina possano sopportare tali vibrazioni. Si vorrebbe poi, per $\omega_n < \frac{\Omega}{\sqrt{2}}$, ridurre il più possibile δ , così da ridurre la trasmissibilità. Eppure Ω varia con continuità fino al valore di regime in base al quale progettiamo le fondazioni passando per la zona di amplificazione ($t \rightarrow \infty$), dove la trasmissibilità è tanto maggiore quanto è piccolo δ . Si dovrà pertanto scegliere un δ ottimo e/o rendere più rapidi possibile i transitori di avviamento e spegnimento della macchina per evitare il più possibile la permanenza nella zona di amplificazione.

27) Stabilità delle vibrazioni e vibrazioni autoeccitate

Per le vibrazioni di un sistema a un grado di libertà:

- scrivere le equazioni di un sistema non lineare e calcolare le posizioni di equilibrio;
- esporre i concetti riguardanti la stabilità nei casi non lineari e il teorema di Lyapounov;
- linearizzare il modello;
- descrivere la casistica riguardante la stabilità di un sistema linearizzato e del sistema non lineare da cui proviene;
- riportare un esempio di vibrazione auto-eccitata per effetto dell'attrito dinamico variabile con la velocità relativa.

L'equazione di moto di un sistema in generale non lineare è

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

con f funzione qualsiasi e x la coordinata libera del sistema.

Una posizione di equilibrio è una posizione in cui la coordinata assume un valore costante x_0 e in cui pertanto velocità \dot{x} e accelerazione \ddot{x} sono nulle. Inserita questa coordinata e sue derivate nell'equazione di moto otteniamo

$$f(x_0, 0) = 0$$

che è l'equazione con cui calcolare le posizioni (in generale più d'una) di equilibrio.

Eppure non tutte le posizioni di equilibrio sono stabili. Per definizione una posizione di equilibrio x_0 è:

- stabile se, presa una quantità ε positiva e piccola a piacere, è sempre possibile trovare due quantità δ_x e δ_v positive tali che, perturbato il sistema di una variazione δx della coordinata libera (posizione) e di una δv della derivata prima della coordinata libera (velocità) che rispettano

$$\begin{aligned} |\delta x| &\leq \delta_x \\ |\delta v| &\leq \delta_v \end{aligned}$$

varrà sempre

$$|x - x_0| \leq \varepsilon \quad \forall t > 0;$$

- instabile se non è valida la suddetta condizione;
- asintoticamente stabile se, oltre a valere la condizione di stabilità, vale anche

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x - x_0) = 0$$

Il teorema di Lyapounov afferma poi che, una volta linearizzata l'equazione intorno alla posizione di equilibrio:

- se il moto da essa descritto è asintoticamente stabile, la posizione di equilibrio è asintoticamente stabile;
- se il moto da essa descritto è instabile, la posizione di equilibrio è instabile;
- se il moto da essa descritto è stabile, nulla si può dire della stabilità della posizione di equilibrio.

La funzione f nell'equazione del moto si linearizza con Taylor:

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}) &\approx f(x_0, 0) + \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=0}} (\dot{x} - 0) + \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=0}} (x - x_0) \\ &= \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=0}} \dot{x} + \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=0}} (x - x_0) \end{aligned}$$

Così l'equazione del moto linearizzata è

$$m\ddot{x} + \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=0}} \dot{x} + \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=0}} (x - x_0) = 0$$

Definiamo una nuova coordinata $\tilde{x} = x - x_0$ che è lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio (vale che $\dot{\tilde{x}} = \dot{x}$ e $\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x}$) e quindi

$$m\ddot{\tilde{x}} + \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=0}} \dot{\tilde{x}} + \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=0}} \tilde{x} = 0$$

Se chiamiamo

$$c = \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=0}}$$

e

$$k = \left. \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=0}}$$

si vede che l'equazione linearizzata è quella tipica di un sistema vibrante a un grado di libertà

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

(N.B. c e k possono anche assumere valori negativi!)

Studiamo la soluzione a seconda dei valori assunti da c e k .

La soluzione è del tipo

$$\tilde{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

dove λ_1 ed λ_2 sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

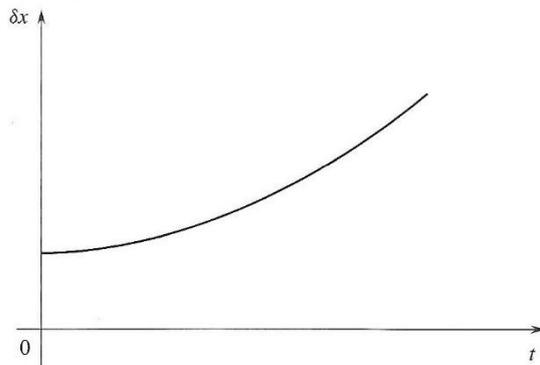
cioè

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Individuiamo 6 casi:

- caso 1: $k < 0$, c qualsiasi

$\Delta = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0$; le radici sono quindi entrambe reali, una positiva e una negativa. La soluzione è un'esponenziale crescente, cioè è instabile. Allora anche la posizione di equilibrio è instabile.

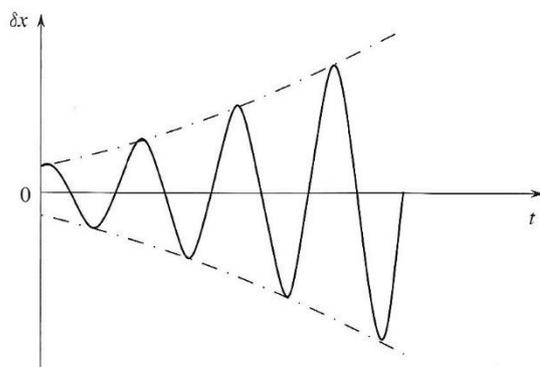


- caso 2: $k > 0$, $c < -2\sqrt{km}$

$\Delta = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0$; le radici sono quindi entrambe reali e positive. La soluzione è un'esponenziale crescente, cioè è instabile. Allora anche la posizione di equilibrio è instabile.

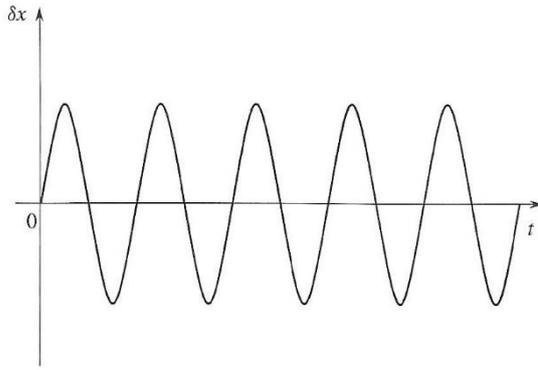
- caso 3: $k > 0$, $-2\sqrt{km} < c < 0$

$\Delta = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0$; le radici sono quindi complesse coniugate con parte reale positiva. La soluzione è il prodotto tra una funzione armonica e un'esponenziale crescente, cioè è instabile. Allora anche la posizione di equilibrio è instabile.



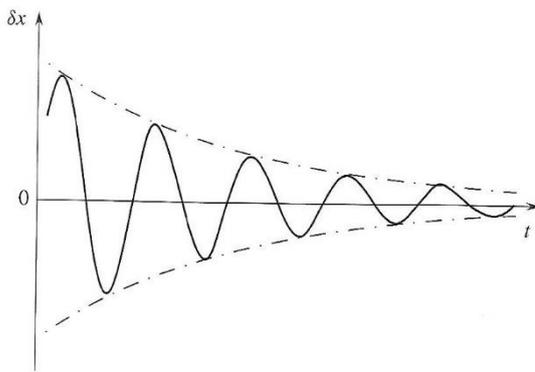
- caso 4: $k > 0$, $c = 0$

$\Delta = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0$; le radici sono quindi complesse coniugate con parte reale nulla. La soluzione è una funzione armonica, cioè stabile. Allora nulla si può dire sulla stabilità della posizione di equilibrio.



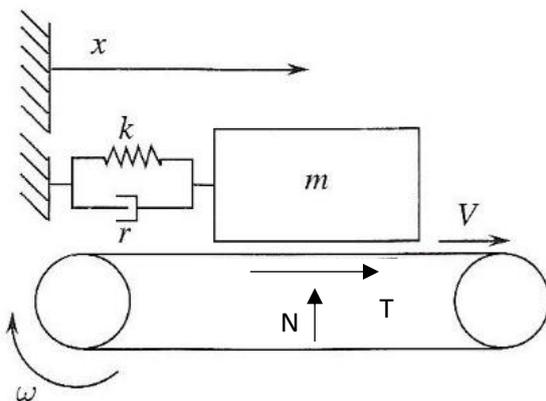
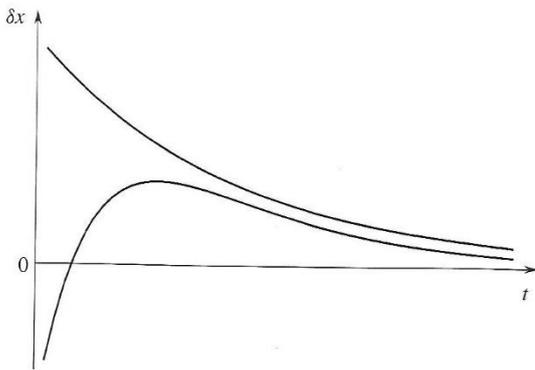
- caso 5: $k > 0, 0 < c < 2\sqrt{km}$

$\Delta = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0$; le radici sono quindi complesse coniugate con parte reale negativa. La soluzione è il prodotto tra una funzione armonica e un'esponenziale decrescente, cioè è asintoticamente stabile. Allora la posizione di equilibrio è stabile.



- caso 6: $k > 0, c > 2\sqrt{km}$

$\Delta = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0$; le radici sono quindi reali ed entrambe negative. La soluzione è somma di due esponenziali decrescenti, quindi asintoticamente stabile. Allora la posizione di equilibrio è stabile.



Esempio – Vibrazioni autoeccitate per attrito

Una massa è fissata a terra tramite un parallelo molla-smorzatore ed è forzata dall'attrito prodotto da un nastro di velocità V .

La forzante è la reazione tangenziale

$$T = f(|V_{rel}|)mg$$

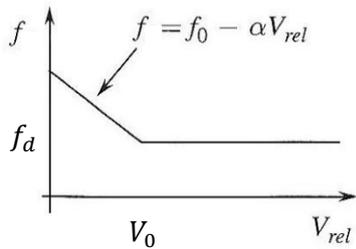
dove la legge di f è

$$f(|V_{rel}|) = f_0 - \alpha|V_{rel}|$$

con

$$V_{rel} = V - \dot{x}$$

$$\alpha = \frac{f_0 - f_d}{V_0}$$



L'equazione della dinamica è

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \text{sign}(V_{rel}) [f_0 - \alpha|V_{rel}|]mg$$

$$= [\text{sign}(V_{rel}) f_0 - \alpha(V - \dot{x})]mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + (c - \alpha mg)\dot{x} + kx - [\text{sign}(V_{rel}) f_0 - \alpha V]mg = 0$$

Dunque la funzione non lineare è

$$\mathcal{F}(x, \dot{x}) = (c - \alpha mg)\dot{x} + kx - [\text{sign}(V_{rel}) f_0 - \alpha V]mg$$

e la posizione di equilibrio statico si trova pertanto imponendo

$$\mathcal{F}(x_0, 0) = kx_0 - (f_0 - \alpha V)mg = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{(f_0 - \alpha V)mg}{k}$$

Se definisco $\tilde{x} = x - x_0$ e lo inserisco nell'equazione ho che questa diventa

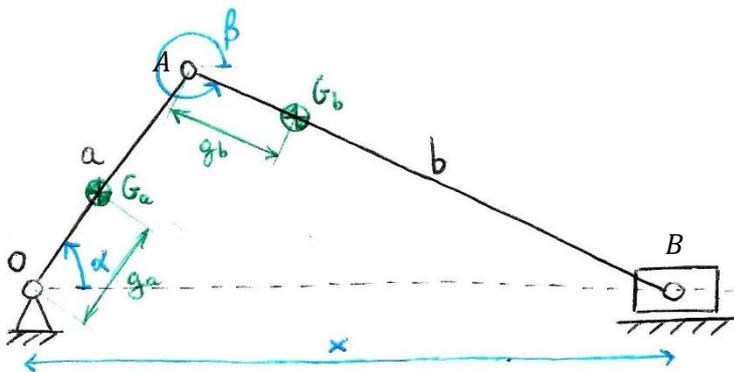
$$m\ddot{\tilde{x}} + (c - \alpha mg)\dot{\tilde{x}} + k\tilde{x} = 0$$

Ora il coefficiente della derivata prima non ha segno stabilito, quindi si possono avere casi di instabilità.

28) Manovellismo ordinario centrato

Riguardo al manovellismo del motore si risponda ai seguenti quesiti.

- Effettuare l'analisi cinematica generale del meccanismo evidenziando i vincoli, i moti relativi e assoluti e i gradi di libertà;
- assumendo come variabile indipendente la posizione angolare dell'albero motore α , formulare il modello cinematico per la posizione e velocità che esprime il moto della biella β e $\dot{\beta}$ e del pistone x e \dot{x} in funzione di α e $\dot{\alpha}$; sviluppare solo i calcoli significativi;
- descrivere il moto del pistone in funzione di α , assumendo $\dot{\alpha}$ costante;
- calcolare le approssimazioni del I e II ordine dello jacobiano $\Lambda_x(\alpha)$;
- descrivere la riduzione della biella a tre masse puntiformi e la sua approssimazione a due masse;
- per l'intero meccanismo, prima in maniera esatta e poi approssimando la biella con due masse, in funzione di α , β e x rispettive derivate, esprimere:
 - l'energia cinetica;
 - il momento d'inerzia $J_m^*(\alpha)$ ridotto all'asse dell'albero motore;
- formulare l'equazione e risolvere l'integrale particolare delle vibrazioni forzate dall'inerzia della massa traslante del motore montato su supporti elastici.



Il meccanismo consta di manovella e pistone compiono rispettivamente una rotazione e una traslazione assoluta, mentre la biella compie rotazione relativa rispetto a ciascuno degli altri due (globalmente rototrasla). La formula di Grübler per i gradi di libertà restituisce $n = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1 \text{ GdL}$.

Si può scrivere l'equazione di chiusura $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$ che in forma fasoriale è $ae^{i\alpha} + be^{i\beta} = x$

mentre proiettata è

$$\begin{cases} a \cos \alpha + b \cos \beta = x \\ a \sin \alpha + b \sin \beta = 0 \end{cases}$$

Si ricavano facilmente le funzioni $\beta(\alpha)$ e $x(\alpha)$ (è definito $\lambda = \frac{a}{b}$):

$$\beta(\alpha) = \arcsin(-\lambda \sin \alpha)$$

$$x(\alpha) = a \cos \alpha + b \sqrt{1 - \sin^2 \beta(\alpha)} = a \cos \alpha + b \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}$$

Derivando si ha

$$ia\dot{\alpha}e^{i\alpha} + ib\dot{\beta}e^{i\beta} = \dot{x}$$

che proiettata è

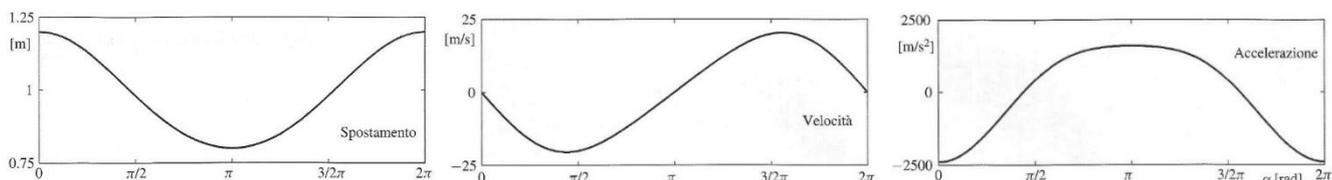
$$\begin{cases} -a\dot{\alpha} \sin \alpha - b\dot{\beta} \sin \beta = \dot{x} \\ a\dot{\alpha} \cos \alpha + b\dot{\beta} \cos \beta = 0 \end{cases}$$

Così si hanno

$$\dot{\beta}(\alpha, \dot{\alpha}) = -\frac{a\dot{\alpha} \cos \alpha}{b \cos \beta} = -\frac{\lambda \cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta(\alpha)}} \dot{\alpha} = -\frac{\lambda \cos \alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}} \dot{\alpha} = \Lambda_{\beta}(\alpha) \dot{\alpha}$$

$$\dot{x}(\alpha, \dot{\alpha}) = -a\dot{\alpha} \sin \alpha - b \left(-\frac{\lambda \cos \alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}} \dot{\alpha} \right) (-\lambda \sin \alpha) = -a \left[\sin \alpha + \frac{\lambda \frac{1}{2} \sin(2\alpha)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}} \right] \dot{\alpha} = \Lambda_x(\alpha) \dot{\alpha}$$

Si possono fare le seguenti considerazioni sul moto del pistone graficandone posizione, velocità e accelerazione in funzione della rotazione α della manovella (ma considerandone la velocità angolare $\dot{\alpha}$ costante).



Si vede, come ci si aspetta, che la velocità del pistone si annulla in corrispondenza dei punti morti superiore ($\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$) e inferiore ($\alpha = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$) e che, sempre in corrispondenza di questi, si hanno il massimo (nel p.m.i.) e il minimo (nel p.m.s.) dell'accelerazione

L'espressione della velocità del pistone, sebbene lineare in $\dot{\alpha}$, si scopre essere fortemente non lineare in α e generalmente complicata. Se ne possono fare delle approssimazioni considerando che λ è spesso un valore abbastanza piccolo ($\lambda = 0.1 \div 0.25$):

- una prima, decisamente grossolana, si ha trascurando il secondo termine del binomio tra parentesi quadre; quest'approssimazione al prim'ordine è dunque

$$\dot{x}_I(\alpha, \dot{\alpha}) = -a \sin \alpha \dot{\alpha} = \Lambda_{x,I}(\alpha) \dot{\alpha}$$

- una seconda, più accurata, si ottiene sviluppando McLaurin del prim'ordine per la funzione $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}$; infatti, se $\varepsilon = \lambda^2 \sin^2 \alpha \ll 1$, vale

$$\sqrt{1 - \varepsilon} \approx \sqrt{1 - \varepsilon}|_{\varepsilon=0} + \frac{-1}{2\sqrt{1 - \varepsilon}}|_{\varepsilon=0} \varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

e allora

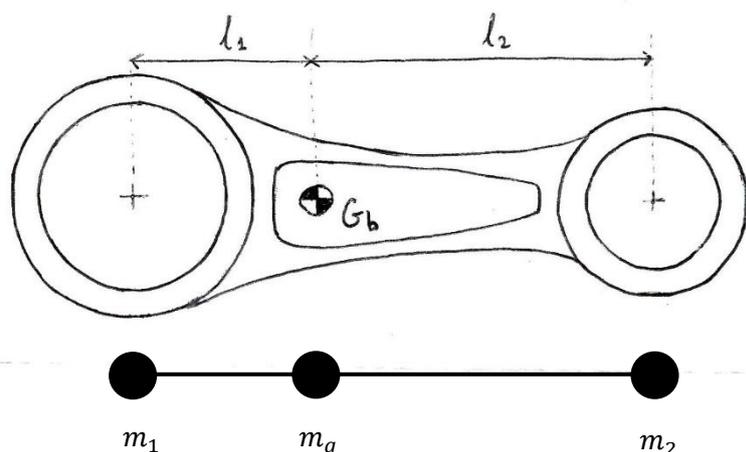
$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} \approx 1 - \frac{\lambda^2 \sin^2 \alpha}{2}$$

Pertanto si ha un'approssimazione del secondo ordine per la posizione del pistone

$$x(\alpha) = a \cos \alpha + b \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} \approx a \cos \alpha + b \left(1 - \frac{\lambda^2 \sin^2 \alpha}{2} \right) =: x_{II}(\alpha)$$

Derivando $x_{II}(\alpha)$ ho l'approssimazione al second'ordine della velocità:

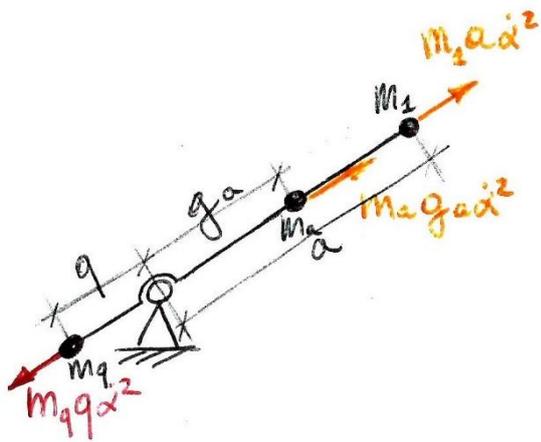
$$\dot{x}_{II}(\alpha, \dot{\alpha}) = -a\dot{\alpha} \sin \alpha + b \left(-\frac{2\lambda^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} \dot{\alpha} \right) = -a \left[\sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin(2\alpha) \right] \dot{\alpha} = \Lambda_{x,II}(\alpha) \dot{\alpha}$$



Per la descrizione della dinamica conviene ridurre la biella a un sistema di masse puntiformi solidali. La riduzione a tre masse prevede di metterne una m_2 in testa, una m_1 in piede e una m_g nel centro di massa della biella tali che: ⁽¹⁾la loro somma restituisca la massa della biella m_b , ⁽²⁾il centro di massa rimanga lo stesso e ⁽³⁾si abbia lo stesso momento d'inerzia rispetto a centro di massa J_b^G .

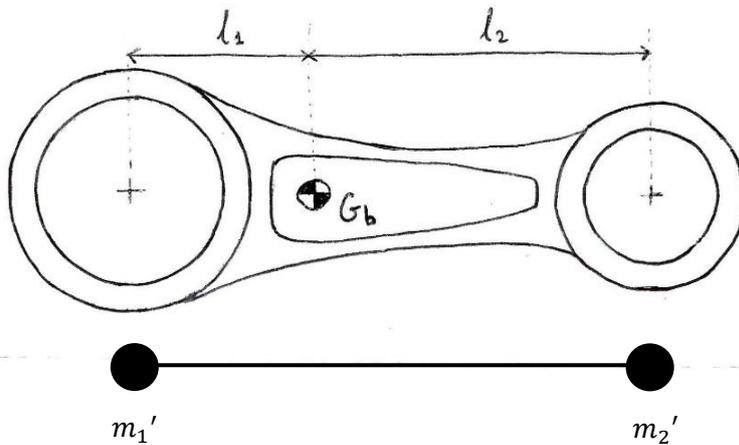
Ho quindi un sistema di 3 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} m_1 + m_g + m_2 = m_b & (1) \\ m_1 l_1 = m_2 l_2 & (2) \\ m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 = J_b^G & (3) \end{cases}$$



La semplificazione nasce dal fatto che, ora che m_1 è sulla cerniera biella-manovella, posso considerarla facente parte della manovella stessa (allo stesso modo considererò m_2 facente parte del pistone) che, ruotando con $\dot{\alpha}$, subisce a questo punto le forze di inerzia $m_1 a \dot{\alpha}^2$ e $m_a g a \dot{\alpha}^2$. Se allungo di q la manovella dal lato opposto alla biella e vi pongo un contrappeso m_q , posso scegliere queste due grandezze tali che la forza di inerzia del contrappeso bilanci le precedenti due: $m_q q \dot{\alpha}^2 = m_1 a \dot{\alpha}^2 + m_a g a \dot{\alpha}^2$. Ciò è equivalente a $m_q q = m_1 a + m_a g a$, ossia accade che il nuovo centro di massa finisce per cadere proprio sulla cerniera O : non avremo perciò componente dovuta

allo spostamento del centro di massa nell'espressione dell'energia cinetica della manovella.



La riduzione a due masse prevede similmente che vengano poste solamente m_2' in testa ed m_1' in piede. Per risolvere l'equivalenza, dato che ho solo due incognite, avrò bisogno di due sole relazioni: scelgo le equivalenze della massa e del centro di massa, sacrificando quella del momento d'inerzia rispetto al centro di massa e dichiarando quindi di star facendo un'approssimazione.

Risolto il sistema

$$\begin{cases} m_1' + m_2' = m_b \\ m_1' l_1 = m_2' l_2 \end{cases}$$

scelgo contrappeso m_q' e distanza del contrappeso q' tali da far cadere il centro di massa della manovella nuovamente sulla cerniera O e ottengo la semplificazione ricercata anche prima, più un'altra che consiste, una volta messa m_2' a carico del pistone, nella "scomparsa" della biella dalla dinamica e quindi nell'azzeramento della sua energia cinetica.

Volendo svolgere i calcoli sull'energia cinetica e sul momento ridotto in maniera esatta, ossia con tre masse, si vede innanzitutto che

$$E_{tot}^c = \frac{1}{2} (m_q q^2 + m_1 a^2 + m_a g a^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_g v_{G_b}^2 + \frac{1}{2} (m_p + m_2) \dot{x}^2$$

(infatti per il teorema di Huygens-Steiner avrei:

- $E_a^c = \frac{1}{2} J_a^G \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_{tot}^a v_{G_a}^2$, però $J_a^G = m_q q^2 + m_1 a^2 + m_a g a^2$, per definizione, e $v_{G_a} = 0$, mentre
- $E_b^c = \frac{1}{2} J_b^G \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_{tot}^b v_{G_b}^2$, però $m_{tot}^b = m_g$ e $J_b^G = 0$ perché tutta la massa è concentrata nel centro di massa.)

Dalla cinematica si ha $\dot{x} = \Lambda_x(\alpha) \dot{\alpha}$, ma anche:

$$\dot{x}_{G_b} = \Lambda_{x_{G_b}}(\alpha) \dot{\alpha}$$

$$\dot{y}_{G_b} = \Lambda_{y_{G_b}}(\alpha) \dot{\alpha}$$

(dove $v_{G_b}^2 = \dot{x}_{G_b}^2 + \dot{y}_{G_b}^2$).

Dunque

$$E_{tot}^c = \frac{1}{2} \left[m_q q^2 + m_1 a^2 + m_a g a^2 + m_g \left(\Lambda_{x_{G_b}}^2(\alpha) + \Lambda_{y_{G_b}}^2(\alpha) \right) + (m_p + m_2) \Lambda_x^2(\alpha) \right] \dot{\alpha}^2$$

e allora, dal confronto con $E_{tot}^c = \frac{1}{2} J_m^*(\alpha) \dot{\alpha}^2$ si ottiene

$$J_m^*(\alpha) = m_q q^2 + m_1 a^2 + m_a g a^2 + m_g \left(\Lambda_{x_{G_b}}^2(\alpha) + \Lambda_{y_{G_b}}^2(\alpha) \right) + (m_p + m_2) \Lambda_x^2(\alpha)$$

Se si riducesse il sistema a due masse, si otterrebbe

$$E_{tot}^c = \frac{1}{2} (m_q' q'^2 + m_1' a^2 + m_a g a^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} (m_p + m_2') \dot{x}^2$$

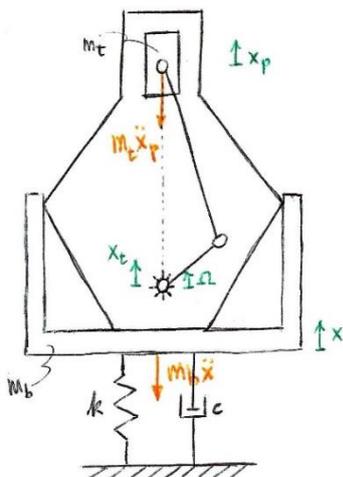
(come prima $E_a^c = \frac{1}{2} J_a^G \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_{tot}^a v_{G_a}^2$, però $J_a^G = m_q' q'^2 + m_1' a^2 + m_a g a^2$, per definizione, e $v_{G_a} = 0$)

Dalla cinematica ho

$$E_{tot}^c = \frac{1}{2} [m_q' q'^2 + m_1' a^2 + m_a g a^2 + (m_p + m_2') \Lambda_x^2(\alpha)] \dot{\alpha}^2$$

Dal confronto con $E_{tot}^c = \frac{1}{2} J_m^*(\alpha) \dot{\alpha}^2$ si ha

$$J_m^*(\alpha) = m_q' q'^2 + m_1' a^2 + m_a g a^2 + (m_p + m_2') \Lambda_x^2(\alpha)$$



Un manovellismo ordinario di spinta è incassato in un basamento di massa m_b . Si considera la riduzione a due masse della biella e si nota che, posto il giusto contrappeso, le forze d'inerzia delle masse attribuibili alla manovella sono tutte bilanciate, ma non lo è quella della massa m_t (somma di una porzione della massa della biella e della massa del pistone). Il basamento è vincolato a muoversi in una sola direzione e collegato a terra tramite il parallelo di una molla e di uno smorzatore e la rotazione della manovella è a velocità costante Ω .

x è la coordinata del basamento, x_p quella del pistone, entrambe nello stesso sistema di riferimento fisso, cosicché le forze d'inerzia di basamento e pistone siano rispettivamente $m_t \ddot{x}_p$ e $m_b \ddot{x}$, quindi l'equazione della dinamica è

$$m_t \ddot{x}_p + m_b \ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0$$

Eppure x ed x_p sono collegati dal moto del pistone x_t (vale che $x_p = x + x_t$), per il quale si può usare l'approssimazione del secondo ordine

$$x_{t,II} = a \cos(\Omega t) + b \left(1 - \frac{\lambda^2 \sin^2(\Omega t)}{2} \right) \Rightarrow$$

(ricordiamo che $\lambda = \frac{a}{b}$ e $\sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{x}_{t,II} &= -a\Omega \sin(\Omega t) - b\Omega \lambda^2 \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) = -a\Omega \left[\sin(\Omega t) + \frac{\lambda}{2} \sin(2\Omega t) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{x}_{t,II} &= -a\Omega^2 [\cos(\Omega t) + \lambda \cos(2\Omega t)] \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} m_t \{ \ddot{x} - a\Omega^2 [\cos(\Omega t) + \lambda \cos(2\Omega t)] \} + m_b \ddot{x} + c \dot{x} + kx &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (m_t + m_b) \ddot{x} + c \dot{x} + kx &= m_t a \Omega^2 [\cos(\Omega t) + \lambda \cos(2\Omega t)] \end{aligned}$$

Agiamo con la sovrapposizione degli effetti per trovare la soluzione particolare.

Consideriamo la sola presenza della forzante $\mathcal{F}_1(t) = m_t a \Omega^2 \cos(\Omega t) = K_1 \cos(\Omega t)$.

La soluzione particolare che ne è risposta è

$$x_{p,1}(t) = X_{p,1} \cos(\Omega t + \psi_1)$$

dove

$$X_{p,1}^* = K_1 G_1(i\Omega) = \frac{K_1/k}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2} + i 2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}} \Rightarrow \begin{cases} X_{p,1} = |X_{p,1}^*| = \frac{K_1/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}} \\ \psi_1 = \langle X_{p,1}^* \rangle = \arctg\left(-\frac{2\delta \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}\right) \end{cases}$$

Consideriamo invece la sola presenza della forzante $\mathcal{F}_2(t) = m_t a \Omega^2 \lambda \cos(2\Omega t) = K_2 \cos(2\Omega t)$.
 La soluzione particolare che ne è risposta è

$$x_{p,2}(t) = X_{p,2} \cos(2\Omega t + \psi_2)$$

dove

$$X_{p,2}^* = K_2 G_2(i\Omega) = \frac{K_2/k}{1 - \frac{(2\Omega)^2}{\omega_n^2} + i 2\delta \frac{2\Omega}{\omega_n}} \Rightarrow \begin{cases} X_{p,2} = |X_{p,2}^*| = \frac{K_2/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(4\delta \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}} \\ \psi_2 = \langle X_{p,2}^* \rangle = \text{arctg} \left(-\frac{4\delta \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{4\Omega^2}{\omega_n^2}} \right) \end{cases}$$

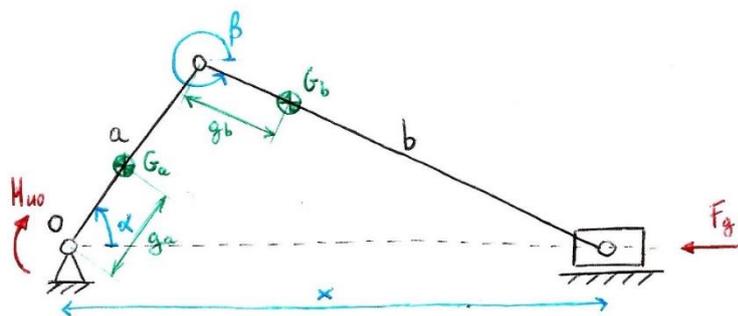
La soluzione particolare sarà

$$x_p(t) = x_{p,1}(t) + x_{p,2}(t)$$

29) Motore alternativo

Nell'ipotesi esemplificativa di approssimazione della biella con due masse puntiformi e di momento resistente costante $M_u^* = -M_{u0}$ sull'albero motore, si soddisfino le seguenti richieste.

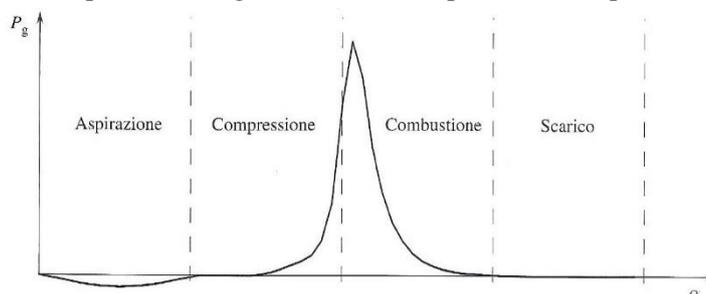
- Descrivere per il motore il ciclo termodinamico, la caratteristica meccanica in funzione del grado di ammissione e definire il momento motore M_m^* ridotto all'asse dell'albero motore;
- per ciascuno dei tre elementi, tracciare il diagramma di corpo libero e scrivere le equazioni di equilibrio dinamico;
- formulare l'equazione dinamica del motore tramite il bilancio delle potenze;
- impostare la relazione per studiare il moto periodico del motore, evidenziando la dipendenza dal moto della manovella α e $\dot{\alpha}$ del momento motore ridotto M_m^* , del momento d'inerzia ridotto J_m^* e del momento ridotto M_{iq} proporzionale a $\dot{\alpha}^2$;
- scrivere la relazione precedente in forma esplicita impiegando l'approssimazione del primo ordine dello jacobiano $\Lambda_{x,1}(\alpha) = -a \sin \alpha$ con a la lunghezza della manovella;
- esprimere la condizione affinché si verifichi il moto periodico;
- dimensionare un volano per ridurre il grado di irregolarità periodica entro il valore i_{max} ;
- mostrare come ridurre lo squilibrio delle forze d'inerzia
 - delle masse collegate all'albero motore,
 - della biella,
 - del pistone e
 - di un motore pluricilindrico.



Se si prende un motore monocilindrico a 4 tempi, il ciclo termodinamico si svolge ogni due rotazioni dell'albero. Partendo dal punto morto superiore, si ha una fase di aspirazione durante il primo mezzo giro, mentre da qui – arrivati al punto morto inferiore – parte la fase di compressione che impiega un altro mezzo giro. Nel mezzo giro successivo avviene l'espansione dovuta alla

combustione del carburante e la restante misura angolare è impiegata per lo scarico dei gas combusti. La forza esercitata sul pistone è pertanto funzione della posizione angolare dell'albero poiché lo è la pressione dei gas nel cilindro:

$$F_g(\alpha) = \pi \frac{D^2}{4} p_g(\alpha)$$



Si è soliti modellare una macchina motrice come volano in rotazione su un albero e su cui agisce un momento.

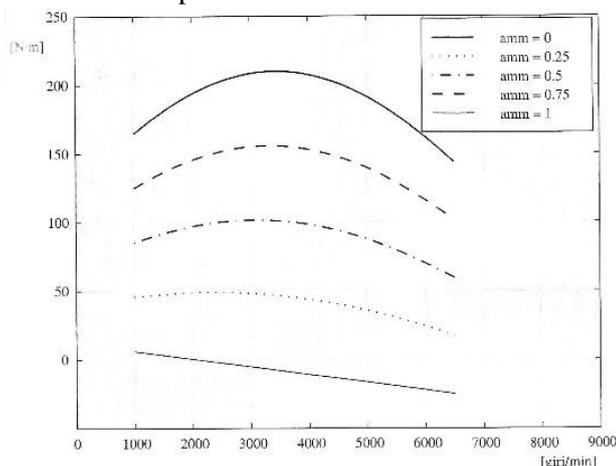
Occorre dunque equiparare tutte le forze agenti a un unico momento ridotto M_m^* che agisce sulla rotazione ω_m di un albero e trasmette così potenza all'esterno del lato motore. Stiamo cioè introducendo un M_m^* tale che

$$W^m = M_m^* \omega_m$$

Nel nostro caso

$$W^m = -F_g(\alpha)\dot{x} = -F_g(\alpha)\Lambda_x(\alpha)\dot{\alpha} \Rightarrow M_m^*(\alpha) = -F_g(\alpha)\Lambda_x(\alpha)$$

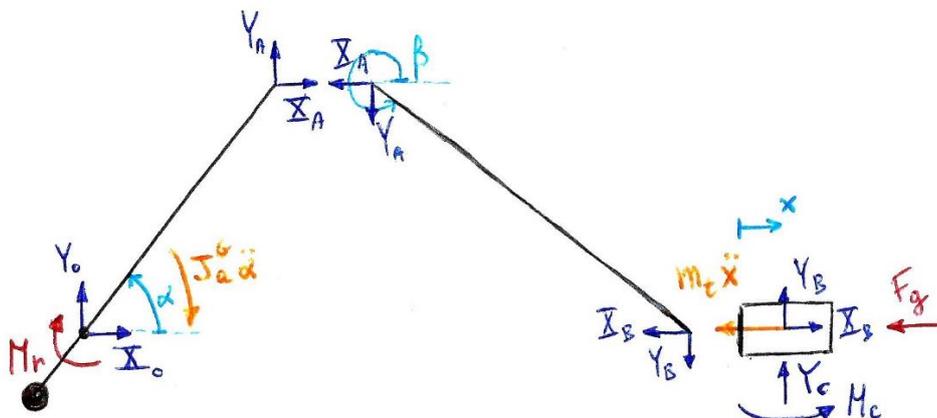
Per un motore monocilindrico a 4 tempi abbiamo la curva caratteristica (in funzione del grado di ammissione):



Si può scrivere una relazione analitica del momento ridotto:

$$M_m^*(\omega_m) = M_m^{\min}(\omega_m) + \gamma[M_m^{\max}(\omega_m) - M_m^{\min}(\omega_m)]$$

Il diagramma di corpo libero per i tre elementi è:



Il bilancio sulla manovella chiede che

$$\begin{cases} X_O + X_A = 0 & (1) \\ Y_O + Y_A = 0 & (2) \\ a \cos \alpha Y_A - a \sin \alpha X_A - M_{u0} - (m_q' q'^2 + m_1' a^2 + m_a g a^2) \ddot{\alpha} = 0 & (3) \end{cases}$$

quello sulla biella che

$$\begin{cases} -X_A - X_B = 0 & (4) \\ -Y_A - Y_B = 0 & (5) \\ -b \sin \beta X_B - b \cos \beta Y_B = 0 & (6) \end{cases}$$

mentre quello sul pistone che

$$\begin{cases} X_B - F_g - (m_p + m_2') \ddot{x} = 0 & (7) \\ Y_B + Y_C = 0 & (8) \\ M_C = 0 & (9) \end{cases}$$

È questo un sistema di 9 equazioni e 9 incognite che fornisce, oltre alle 8 reazioni vincolari:

- il moto (in funzione di α o x indifferentemente, tanto la cinematica che li lega tra loro è nota), se si conosce F_g (analisi diretta);
- M_{u0} (la coppia registrata all'albero) in funzione di F_g , se si conosce il moto (analisi inversa).

Da (4), (5) e (6):

$$Y_B = X_B \operatorname{tg} \beta = -X_A \operatorname{tg} \beta = -Y_A$$

La (3) diventa allora

$$\begin{aligned} -a \cos \alpha Y_B + a \sin \alpha \frac{Y_B}{\operatorname{tg} \beta} - M_{u0} - (m_q' q'^2 + m_1' a^2 + m_a g a^2) \ddot{\alpha} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow Y_B &= \frac{M_{u0} + (m_q' q'^2 + m_1' a^2 + m_a g a^2) \ddot{\alpha}}{-a \cos \alpha + a \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \beta}} \end{aligned}$$

mentre la (7)

$$\begin{aligned} \frac{Y_B}{\operatorname{tg} \beta} - F_g - (m_p + m_2') \ddot{x} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow Y_B &= [F_g + (m_p + m_2') \ddot{x}] \operatorname{tg} \beta \end{aligned}$$

Facendo sparire Y_B :

$$\frac{M_r + (m_q' q'^2 + m_1' a^2 + m_a g a^2) \ddot{\alpha}}{-a \cos \alpha + a \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \beta}} = [F_g + (m_p + m_2') \ddot{x}] \operatorname{tg} \beta$$

$$M_{u0} = -(m_q' q'^2 + m_1' a^2 + m_a g a^2) \ddot{\alpha} + [F_g + (m_p + m_2') \ddot{x}] a (\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \beta)$$

La dinamica del sistema è risolta.

La si potrebbe risolvere anche tramite il bilancio delle potenze:

$$\begin{aligned} \sum W &= \overrightarrow{M_{u0}} \cdot \vec{\dot{\alpha}} + \overrightarrow{F_g} \cdot \vec{\dot{x}} = -M_{u0} \dot{\alpha} - F_g \dot{x} \\ E_{tot}^c &= \frac{1}{2} (m_q' q'^2 + m_1' a^2 + m_a g a^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} (m_p + m_2') \dot{x}^2 \\ \frac{d}{dt} E_{tot}^c &= (m_q' q'^2 + m_1' a^2 + m_a g a^2) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + (m_p + m_2') \dot{x} \ddot{x} \end{aligned}$$

L'equazione è allora

$$\begin{aligned} -M_{u0} \dot{\alpha} - F_g \dot{x} &= (m_q' q'^2 + m_1' a^2 + m_a g a^2) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + (m_p + m_2') \dot{x} \ddot{x} \\ M_{u0} &= -(m_q' q'^2 + m_1' a^2 + m_a g a^2) \dot{\alpha} - [F_g + (m_p + m_2') \dot{x}] \frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}} \end{aligned}$$

Si può dimostrare che

$$\frac{\dot{x}}{\dot{\alpha}} = \Lambda_x(\alpha) = -a(\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \beta)$$

Infatti l'equazione della dinamica deve risultare la stessa quando ricavata tramite diagramma di corpo libero o tramite bilancio delle potenze (o equazioni di Lagrange...)

Lo studio del moto periodico del motore si effettua trovando le potenze agenti e l'energia cinetica del sistema, che come già visto sono

$$W^m = -F_g(\alpha) \Lambda_x(\alpha) \dot{\alpha}$$

$$W^u = -M_{u0} \dot{\alpha}$$

$$E_{tot}^c = \frac{1}{2} (m_q' q'^2 + m_1' a^2 + m_a g a^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} (m_p + m_2') \dot{x}^2 = \frac{1}{2} J_a^G \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_t \Lambda_x^2(\alpha) \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} J_m^*(\alpha) \dot{\alpha}^2$$

ma considerando che stavolta la derivata dell'energia cinetica è

$$\begin{aligned} \frac{dE_{tot}^c}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J_m^*(\alpha) \dot{\alpha}^2 \right] = J_m^*(\alpha) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{dJ_m^*(\alpha)}{d\alpha} \dot{\alpha}^3 = J_m^*(\alpha) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha} [J_a^G + m_t \Lambda_x^2(\alpha)] \dot{\alpha}^3 \\ &= J_m^*(\alpha) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + m_t \Lambda_x(\alpha) \frac{d\Lambda_x(\alpha)}{d\alpha} \dot{\alpha}^3 \end{aligned}$$

Allora il bilancio delle potenze è

$$\begin{aligned} -F_g(\alpha) \Lambda_x(\alpha) \dot{\alpha} - M_{u0} \dot{\alpha} &= J_m^*(\alpha) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + m_t \Lambda_x(\alpha) \frac{d\Lambda_x(\alpha)}{d\alpha} \dot{\alpha}^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{\alpha} &= \frac{-F_g(\alpha) \Lambda_x(\alpha) - M_{u0} - m_t \Lambda_x(\alpha) \frac{d\Lambda_x(\alpha)}{d\alpha} \dot{\alpha}^2}{J_m^*(\alpha)} = \frac{M_m^*(\alpha) - M_{u0} + M_{iq}(\alpha, \dot{\alpha})}{J_m^*(\alpha)} \end{aligned}$$

È stato posto

$$M_{iq}(\alpha, \dot{\alpha}) = -m_t \Lambda_x(\alpha) \frac{d\Lambda_x(\alpha)}{d\alpha} \dot{\alpha}^2$$

ed è questo il momento di inerzia quadratico.

Se $\Lambda_x(\alpha) = -a \sin \alpha$, allora

$$M_{iq}(\alpha, \dot{\alpha}) = -m_t \Lambda_x(\alpha) \frac{d\Lambda_x(\alpha)}{d\alpha} \dot{\alpha}^2 = -m_t (-a \sin \alpha) (-a \cos \alpha) \dot{\alpha}^2 = -\frac{1}{2} m_t a^2 \sin(2\alpha) \dot{\alpha}^2$$

così l'equazione del moto è

$$\ddot{\alpha} = \frac{F_g(\alpha) a \sin \alpha - M_{u0} - \frac{1}{2} m_t a^2 \sin(2\alpha) \dot{\alpha}^2}{J_a^G + m_t a^2 \sin^2 \alpha}$$

La condizione per il regime periodico è, se il periodo è $\mathbb{A} = 4\pi$:

$$\int_{\alpha(t)}^{\alpha(t)+4\pi} [M_m^*(\alpha) + M_u^*(\alpha)] d\alpha = \int_0^{4\pi} [-F_g(\alpha) \Lambda_x(\alpha) - M_{u0}] d\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{u0} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} -F_g(\alpha) \Lambda_x(\alpha) d\alpha$$

L'irregolarità periodica del sistema è $i \approx \frac{\Delta_{max} E_{tot}^c}{J_{med} \omega_{med}^2}$ e va tenuta sotto un valore i_{max} . Si riesce a fare ciò dimensionando opportunamente un volano, quindi agendo sull'inerzia del sistema. Si fanno innanzitutto due approssimazioni:

- si considera $J_m^*(\alpha) \approx J_a^G$ perché $J_a^G \gg m_t \Lambda_x^2(\alpha)$ e
- si ipotizza $\dot{\alpha} = \omega_{med} = cost$, pertanto M_{iq} è solo funzione di α

L'equazione del moto diventa

$$M_m^*(\alpha) \dot{\alpha} + M_u^* \dot{\alpha} + M_{iq}(\alpha) \dot{\alpha} = J_a^G \dot{\alpha} \ddot{\alpha} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J_a^G \dot{\alpha}^2 \right] = \frac{d}{dt} [E_{tot}^c]$$

Se la si integra:

$$\int_0^t [M_m^*(\alpha) + M_u^* + M_{iq}(\alpha)] \dot{\alpha} dt = \int_0^t \frac{dE_{tot}^c}{dt} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\tilde{\alpha}} [M_m^*(\alpha) + M_u^* + M_{iq}(\alpha)] d\alpha = \Delta E_{tot}^c(\tilde{\alpha})$$

Trovato $\Delta_{max} E_{tot}^c$ da questa relazione, si può aggiungere un volano all'albero tale che

$$\frac{\Delta_{max} E_{tot}^c}{J_a^G \omega_{med}^2} \leq i_{max} \Rightarrow J_a^G \geq \frac{\Delta_{max} E_{tot}^c}{i_{max} \omega_{med}^2}$$

Si riduce lo squilibrio delle forze di inerzia di manovella e biella dapprima riducendo la biella in due masse, m_2' in testa ed m_1' in piede, tali che

$$\begin{cases} m_1' + m_2' = m_b \\ m_1' l_1 = m_2' l_2 \end{cases}$$

e successivamente assegnando m_1' alla manovella, così che le forze di inerzia date dalla massa della manovella e da m_1' possano essere bilanciate da un contrappeso rotante con la manovella stessa.

Rimane tuttavia la forza di inerzia attribuibile al moto del pistone (di massa $m_t = m_p + m_2'$ ora che ho ridotto la biella), che possiamo immaginare scaricarsi sulla cerniera in O .

Si prende l'approssimazione del second'ordine della velocità del pistone

$$\dot{x}_{II} = -a \left[\sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin(2\alpha) \right] \dot{\alpha}$$

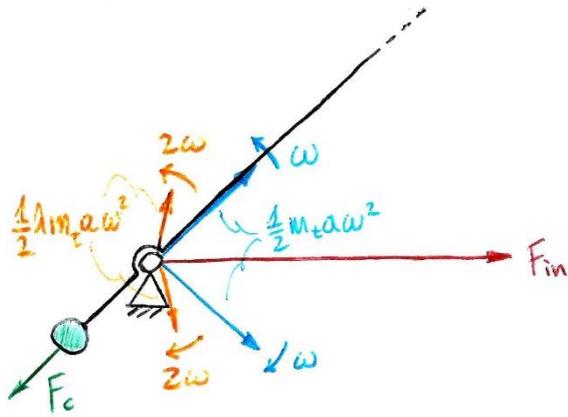
e si considera, ipotizzando che $\dot{\alpha} = \omega = cost$ (così $\alpha = \omega t$), che la forza di inerzia sarà

$$F_{in} = -m_t \ddot{x}_{II} = m_t a [\omega \cos(\omega t) + \omega \lambda \cos(2\omega t)] \omega = m_t a \omega^2 \cos(\omega t) + m_t a \omega^2 \lambda \cos(2\omega t)$$

Individuiamo dunque una componente della forza di inerzia di prim'ordine e una di secondo:

$$F_{in}^I = m_t a \omega^2 \cos(\omega t) = \frac{1}{2} m_t a \omega^2 \cos(\omega t) + \frac{1}{2} m_t a \omega^2 \cos(-\omega t)$$

$$F_{in}^{II} = m_t a \omega^2 \lambda \cos(2\omega t) = \frac{1}{2} m_t a \omega^2 \lambda \cos(2\omega t) + \frac{1}{2} m_t a \omega^2 \lambda \cos(-2\omega t)$$



Notiamo che ognuna di queste due componenti può essere scomposta in due ulteriori componenti che sono due vettori controrotanti con velocità angolare ω per il primo ordine e 2ω per il secondo. Aggiungendo un ulteriore contrappeso, notiamo che la forza centrifuga F_c di questo può, se opportunamente dimensionato, bilanciare almeno la componente rotante di prim'ordine rotante con la manovella. Le altre tre componenti vengono subite tutte nel motore monocilindrico.

Allineando più cilindri si possono tuttavia bilanciare l'interezza della forza F_{in}^I :

